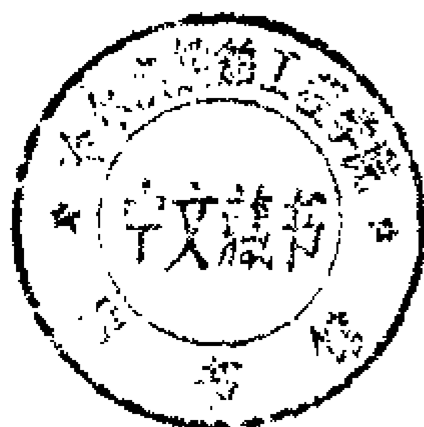
·现代数学丛书·

指标定理与热方程方法

虞言林 著



上海科学技术出版社

责任编辑　赵序明

·现代数学丛书·

指标定理与热方程方法

虞言林　著

上海科学技术出版社出版、发行

（上海瑞金二路450号）

新华书店上海发行所经销　上海市印刷三厂印刷

开本787×1092　小1/16　印张17　插页4　字数218,000

1996年11月第1版　1996年11月第1次印刷

印数1—1,200

ISBN 7-5323-3909-2/O·196

定价：32.00元

内 容 提 要

本书介绍微分几何学中一些著名的椭圆算子的局部指标定理。全书有8章。首先系统介绍了紧致无边黎曼流形上的热方程与椭圆方程的基本理论、示性类的陈-韦依(Weil)理论以及超代数论。然后将它们用来阐述与严格证明局部指标定理。

本书可作为数学专业研究生的教材，也可供数学物理工作者参考。

Modern Mathematics Series

INDEX THEOREM AND HEAT EQUATION METHOD

Yu Yanlin

Shanghai Scientific & Technical Publishers

Index theorem and heat equation method

Yu Yanlin

Abstract

The main purpose of this book is to provide a self-contained, complete and rigorious representation of the local version of the Atiyah-Singer index theorem. It contains proofs of the local index theorems for de Rham-Hodge operators, Signature operators, Dirac operators by using the heat equation method. They are up to standard of the pure Mathematics. A method of a Chern root algorithm is introduced as well, which is simpler than and as efficient as methods given by other ideas.

出版说明

从60年代起，由华罗庚教授任主编的《现代数学丛书》编辑委员会曾组织编著，并由我社出版了多部具有很高水平的数学学术专著，有几部专著并已在国外出了外文版，受到国内外数学界和广大读者的高度重视，获得了很高的评价．原编委会中华罗庚、关肇直、吴新谋三位教授虽已先后逝世，但他们为本《丛书》所作出的贡献迄今仍为人们所敬仰、怀念．由于某些客观原因，《现代数学丛书》的出版工作曾一度停顿．

为了适应现代数学的迅速发展，更好地反映我国数学家近几年的优秀研究成果，必须大力加强《现代数学丛书》的规划、编辑、出版工作．充实编委会的力量．考虑到不少编委年事已高，经向原编委会中大部分同志及数学界有关专家广泛征求意见后，于1990年对编委会作了调整，补充了一些著名的中年数学家和学科带头人，建立了新的编委会，并进一步明确了本丛书的宗旨．

《现代数学丛书》新的编辑委员会由苏步青教授任名誉主编、谷超豪教授任主编，18位著名数学家任委员．编委会负责推荐(或审定)选题和作者，主持书稿的审核等工作．

《现代数学丛书》的宗旨是：向国内外介绍我国比较成熟的、对学科发展方向有引导作用的、国内第一流水平的数学研究成果，反映我国数学研究的特色和优势，扩大我国数学研究成果的影响，促进学科的发展和国内外的学术交流．

为了实现上述宗旨，本丛书将陆续组织出版在基础数学、应用数学和计算数学方面处于学科发展前沿、有创见且具有系统完整研究成果的现代数学学术专著．

为出版好《现代数学丛书》，我们热切地期望着数学界各位专家的大力支持和悉心指导，并欢迎广大读者提出宝贵的建议和意见．

上海科学技术出版社

前　言

即使出不了文章，也要搞 Atiyah-Singer 指标定理.

——陈省身

这本书的前身是1986年南开数学所几何年活动中的一份讲义. 1992年被列为全国数学研究生暑期教学中心的教材. 在这份讲义的基础上，我们补充了流形上热方程理论，陈-韦依(Weil)示性式论，以及一些技术性的改进，终于成了现在这本书. 在成书的过程中，我们力图保持使大学高年级学生及研究生感到可读的水平，因而补充了一些未见诸文献的计算和论证细节. 没料到这么一来竟花了长长的8个年头. 在这8年里真有不少感慨. 主要有两个方面：一是不想说的；另一却是极想借此机会有所表示的.

Atiyah-Singer 指标定理是数学宝库中一颗璀璨的明珠. 对它的高度评价及赞美早已路人皆知了. 后来在这个领域中又出现了大量极有价值的成果，尤其在物理学的想法介入之后，更显生机. 不过在后来的这个大潮中，似乎出现了一丝执拗，使得用古典的数学标准来评判成了难于启齿的事了. "各自为政"之事也时有发生. 这种现象对于孤立在外的我来说，自是难于说个明白. 这便是前面提到的不想多说的感慨. 现在粗略地谈谈本书的内容，供阅读时参考. 本书的第1章介绍了黎曼几何学中的基础知识，侧重介绍活动标架法，以为本书后面的具体计算做准备. 这一章中还顺便指出活动标架法与主丛的联络论的关系，希望使一些读者在读其他的数学文献时，遇到主丛联络的概念而不致发憷. 第2章和第4章介绍热方程与椭圆方程的一般理论，以热方程方法处理椭圆方程论. 在这套理论中依次出现了三个技术性难点，它们是：(1) 热方程的 Cauchy 问题的解的存在性(第2章 §2.3)；

(2) Hodge 定理(第 2 章 § 2.4); (3) 热方程的基本解的渐近展开(第 4 章 § 4.3). 为了处理上面提到的三个难点, 人们引入了一些重要的概念, 例如基本解(第 2 章 § 2.1)、Levi 算法(第 2 章 § 2.1)和 MP 拟基本解(第 4 章 § 4.1)等. 此外为使推理中的逻辑关系简明, 我们在第 2 章 § 2.2 中引入"初解"的概念. 这是一个权宜之计的概念, 怕是难登大雅之堂. 第 3 章介绍陈-韦依(Weil)理论. 这是拓扑示性类中的一个重要篇章. 在微分几何学中, 为数众多的涉及整体与局部关系的探讨, 是常常经过这道关口的. 在这一章 § 3.3 中引入的陈根算法是在微分几何这一层次上的, 而不是通常拓扑学中同调论那一层次上的. 引入的目的是想使心急的读者在阅第 6 章 § 6.1 的讨论之后, 便能对局部指标定理的证明有一个大体的了解. 第 5 章介绍 Clifford 代数与超代数. 前者是经典的, 只是定理 5.1.8 的证明也许比传统的简单一些. 在超代数的介绍中, 我们希望通过命题 5.2.9 与命题 5.2.12 反映超代数这一观念的妙处. 第 6、7 章介绍几个椭圆算子的局部指标定理, 特别仔细地讨论了 Signature 算子的情形. 第 8 章引进 Atiyah-Singer 算子的概念, 它是几何中出现的一阶椭圆算子的统一描写. 当联络取定之后, 这种算子相当于一种超 G-Clifford 模.

最后, 要谈一谈前面提的"极想有所表示的感慨": 就是要感谢下列数学界前辈、同行和挚友, 他们在本书的写作中给予了极大的帮助.

在这篇前言开始的一句话, 是在 1985 年夏天, 陈省身先生在筹备 1986 年南开数学所几何年时讲的. 它体现了一种期待、一份"偏袒"、一项号召. 那句话对我的文章[23]的完成起了决定性的影响, 以致在纪念中国数学会成立 50 周年时, 拿到大会上. 那篇文章也就是后来几何年讲义的主要部分.

伍鸿熙先生是我的良师益友, 我们长时期就微分几何、指标定理交换着看法. 在写本书时, 我的一些模糊认识常常得到他的指点.

我曾有幸先后从学于江泽涵、廖山涛、姜伯驹、吴光磊、吴文俊

等各位先生. 他们的正派学风、严谨的治学态度, 非亲眼目睹是很难想象的. 这本书的写作如能体现出他们的教化所致, 我将是非常高兴的.

陆启铿先生在本书写作的最后阶段, 对我大力扶助, 使我难忘.

我的许多朋友, 如沈纯理、孟道骥、李安民、周青、张伟平、陆志勤等对书稿提出过宝贵的意见; 冯惠涛和成斌订正了书稿中不少缪误. 为此特向以上各位深表谢意.

本书在撰写过程中得到数学天元基金的资助, 在此表示感谢.

虞言林

1995 年 3 月

于中国科学院数学研究所

目　录

CONTENTS

基础公式表

一、微分式(见§1.2)

配对关系

$$B:\ \Lambda^k(M)\times\underbrace{[\Gamma(TM)\times\cdots\times\Gamma(TM)]}_{k个}$$

$$\to\mathscr{F}(M):(\omega,X_1,\cdots,X_k)\mapsto\omega(X_1,\cdots,X_k)$$

(i) $\omega(X_1,\cdots,X_k)$对于变元$\omega,X_1,\cdots,X_k$皆是$\mathscr{F}(M)$线性的.

(ii) 若$\omega_1\in\Lambda^p(M)$; $\omega_2\in\Lambda^q(M)$; $X_1,\cdots,X_{p+q}\in\Gamma(TM)$,则

$$(\omega_1\wedge\omega_2)(X_1,\cdots,X_{p+q})$$
$$=\frac{1}{p!q!}\sum_\pi\omega_1(X_{\pi(1)},\cdots,X_{\pi(p)})$$
$$\times\omega_2(X_{\pi(p+1)},\cdots,X_{\pi(p+q)}).$$

特别地,对$f_1,\cdots,f_k\in\mathscr{F}(M)$,有

$$[(df_1)\wedge\cdots\wedge(df_k)](X_1,\cdots,X_k)=\begin{vmatrix}X_1f_1&\cdots&X_1f_k\\\vdots&&\vdots\\X_kf_1&\cdots&X_kf_k\end{vmatrix}.$$

(iii) 若$\omega\in\Lambda^p(M)$,则

$$(d\omega)(X_1,\cdots,X_{p+1})=\sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}X_j\ \omega(X_1,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{p+1})$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],$$
$$X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{p+1}).$$

二、Riemann 几何

1. 不变观点(见§1.1)

(1) 流形 M 上的联络

$\nabla: \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$: $(X, Y)\mapsto\nabla_X Y$,

满足(i) $\nabla_X Y$ 关于 X 是 $\mathscr{F}(M)$ 线性的;

(ii) $\nabla_X Y$ 关于 Y 具有"导"性.

(2) Levi-Civita 联络＝联络＋下列条件(iii)和(iv):

(iii) $X\langle W_1, W_2\rangle=\langle\nabla_X W_1, W_2\rangle+\langle W_1, \nabla_X W_2\rangle$;

(iv) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X, Y]$.

(3) 曲率 $R(X, Y)$: $\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$,

$$R(X, Y)=\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]}.$$

(4) Bianchi 等式

(I) $R(X, Y)Z+R(Z, X)Y+R(Y, Z)X=0$.

(II) $(\nabla_X R)(Y, Z, W)+(\nabla_Z R)(X, Y, W)$
$+(\nabla_Y R)(Z, X, W)=0$.

2. 幺正标架法(见§1.2)

取 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是局部幺正标架场, 即 $\langle E_i, E_j\rangle=\delta_{ij}$.

$$\nabla_X E_i=\sum_j\omega_{ji}(X)E_j,$$

$$R(X, Y)E_i=\sum_j\Omega_{ji}(X, Y)E_j,\ R_{ijkl}=\Omega_{kl}(E_i, E_j).$$

(1) Levi-Civita 联络的关系式:

$$\begin{cases}d\omega_i=\sum_j\omega_{ji}\wedge\omega_j,\\ \omega_{ij}=-\omega_{ji}.\end{cases}$$

(2) 曲率式:

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}+\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}.$$

3. 主丛上的联络论(见§1.3)

P 是主丛, MF(P)是 P 的局部截面集合.

(1) 联络是 $\{\omega_\sigma|\sigma\in \mathrm{MF}(P)\}$ 满足

$$\omega_{\sigma\cdot g}=g^{-1}\cdot\omega_\sigma\cdot g+g^{-1}\cdot dg.$$

(2) 曲率

$$\Omega_\sigma = d\omega_\sigma + \frac{1}{2}[\omega_\sigma, \ \omega_\sigma].$$

(3) Bianchi(II)

$$d\Omega_\sigma = [\Omega_\sigma, \ \omega_\sigma].$$

4. 向量丛上的联络论(见§1.4)

(1) 联络 $D: \Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E)$; $(X, W)\mapsto\nabla_X W$, 满足:

(i) $D_X W$ 对 X 是 $\mathscr{F}(M)$线性的;

(ii) $D_X W$ 对 W 具有"导"性.

(2) 配联络

$$\nabla_X(\sigma, f) = (\sigma, Xf + \omega_\sigma(X)f).$$

5. 协变导数及 Laplace-Beltrami 算子(见§1.5)

二次协变导数 $D(X, \ Y) = D_X D_Y - D_{\nabla_X Y}$: $\Gamma(E)\to\Gamma(E)$.

高次协变导数

$$\begin{aligned} D(X_1, \cdots, X_{m+1}) = & D_{X_1} D(X_2, \cdots, X_{m+1}) \\ & - D(\nabla_{X_1} X_2, X_3, \cdots, X_{m+1}) \\ & - \cdots - D(X_2, \cdots, X_m, \nabla_{X_1} X_{m+1}). \end{aligned}$$

Laplace-Beltrami 算子 $\Delta_0 = \sum D(E_i, \ E_i)$.

三、法坐标系(见§1.7)

1. 设$(y_1, \cdots, y_n)$是法坐标系, 则

$$y_i = \sum_j g_{ij}(y)\cdot y_j, \ \forall i.$$

2. 设$\{y_1, \cdots, y_n\}$是以 O 为中心的法坐标系, $\{E_1, \cdots, E_n\}$是幺正标架场, 使得它沿着过O点的测地线是平移的, 并且在O点处就是$\left\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right\}\Big|_O$. 令 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 为 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的对偶标架场, ω_{ij} 满足

$$\nabla_{E_k} E_j = \sum_i \omega_{ij}(E_k) E_i.$$

又令 $$H_{ij}=\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\ H_{ikl}=\omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right).$$

则

(i) $y_i=\sum\limits_j y_j H_{ij}$;

(ii) $\sum\limits_j y_j H_{jkl}=0,\ H_{ikl}=-H_{ilk}$;

(iii) $\dfrac{\partial H_{i\alpha}}{\partial y_\beta}-\dfrac{\partial H_{i\beta}}{\partial y_\alpha}=\sum\limits_j(H_{\beta ji}H_{j\alpha}-H_{\alpha ji}H_{j\beta})$;

(iv) $y_i=\sum\limits_j y_j H_{ji}$.

3. $$H_{ij}=\delta_{ij}+\frac{1}{6}\sum_{k,l}R_{iklj}(0)y_k y_l+\cdots,$$

$$H_{ijk}=\frac{1}{2}\sum_l R_{iljk}(0)y_l+\cdots,$$

$$\Delta_0\rho=\frac{1}{\rho}(n-1+\hat{\partial}\log\sqrt{G}).$$

其中 $$G=(\det(H_{ij}))^2,\ \rho=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

四、MP 拟基本解(见 § 4.1)

黎曼流形上的 MP 拟基本解是:

$$H_\infty(t,y,\xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\sum_{i=0}^{\infty}t^i U^{(i)}(\xi,y):E_\xi\to E_y.$$

对于 $v\in E_\xi$, $U^{(i)}(\xi,y)v\equiv\mathscr{U}^{(i)}(y)$, 满足:

$$\begin{cases}\left(\nabla_{\hat{\partial}}+i+\dfrac{\hat{\partial}G}{4G}\right)\mathscr{U}^{(i)}(y)=-\Delta\mathscr{U}^{(i-1)}(y),\\ \mathscr{U}^{(-1)}(y)\equiv0,\\ \mathscr{U}^{(0)}(\xi)=v.\end{cases}$$

五、示性式及陈根代换

1. $2l$ 阶实向量丛(见 § 3.1, § 3.3)

(1) Pontrjagin 示性式 $r_1,r_2,\cdots$, 满足:

$$\det\left(\lambda I+\frac{\Omega}{2\pi}\right)=\lambda^{2l}+r_1\lambda^{2l-2}+r_2\lambda^{2l-4}+\cdots.$$

(2) 陈根 $u_1, \cdots, u_l$ 满足形式等式:

$$\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1,2l}\\ \vdots & & \vdots\\ \Omega_{2l,1} & \cdots & \Omega_{2l,2l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & u_1 & & & \\ -u_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & u_l\\ & & & -u_l & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}r_1=u_1^2+\cdots+u_l^2,\\ r_2=\sum\limits_{i<j}u_i^2u_j^2,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.\end{cases}$$

2. N 维复向量丛(见 §3.1, §8.4)

(1) 陈示性式 $r_1^C, r_2^C, \cdots, r_N^C$ 满足:

$$\det\left(\lambda I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega\right)=\lambda^N+r_1^C\lambda^{N-1}+\cdots+r_N^C.$$

(2) 陈根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 满足形式等式:

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1,N}\\ \vdots & & \vdots\\ \Omega_{N,1} & \cdots & \Omega_{N,N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\end{pmatrix},$$

$$\begin{cases}r_1^C=\lambda_1+\cdots+\lambda_N,\\ r_2^C=\sum\limits_{i<j}\lambda_i\lambda_j,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ r_N^C=\lambda_1\cdots\lambda_N.\end{cases}$$

3. $2l$ 阶定向实向量丛(见 §3.1)

(1) 欧拉示性式 $\widetilde{pf}$ 满足

$$\widetilde{pf}=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^l pf(\Omega)$$

$$=\sum_{i_1,\cdots,i_{2l}}\frac{1}{2^{2l}\cdot\pi^l\cdot l!}\varepsilon(i_1,\cdots,i_{2l})\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2l-1}i_{2l}}.$$

(2) 陈根 $u_1, \cdots, u_l$ 满足形式等式:

$$\frac{1}{2\pi}\begin{pmatrix}\Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1,2l}\\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_{2l,1} & \cdots & \Omega_{2l,2l}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & u_1 & & & \\ -u_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & u_l \\ & & & -u_l & 0\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{pf}=u_1\cdots u_{2l}.$$

第1章

黎曼几何的准备知识

本书假定读者学过大学的微分几何($\mathbf{R}^3$ 中的曲线和曲面理论)以及对曲面论的幺正标架处理法, 对微分流形及其上的切向量、微分式等概念有初步的认识(例如可参阅文献[27]和[6]中的第一、二、三章).

§1.1 黎曼几何的基本概念

1827 年高斯证明了一个极为著名的定理——绝妙的定理(Egregium theorem); 1854 年黎曼在他的就职演说中提出了黎曼几何学的构想. 这是微分几何学在诞生过程中的两件大事, 其核心可以说成是从第一基本形式出发推导出曲率的整个过程. 这一过程实际上是异常复杂的, 以致在黎曼身后, 不少著名的几何学家忙了半个多世纪才算真正弄清楚. 在弄清这一过程期间还产生了一个联络的概念. 这是一个新的重要的发现, 如果用精确的语言来说, 上面谈到的整个事件包含了对黎曼度量、联络、曲率的定义, 以及一个由黎曼度量算出联络再进而算出曲率的算法等等. 在这一节中, 我们对此作一简单介绍.

从现在开始, 我们作一个约定: 凡在以后讲到的流形, 皆是紧致无边 C^∞(光滑)的. 设 M 是 n 维流形, M 上的一个*黎曼度量* g 是一个 C^∞ "指定", 即对于 M 的每一个切向量空间 $M_x(=T_xM$, 这里 $x\in M)$, 指定 M_x 中一个向量内积

$$g_x(\ ,\ ):M_x\times M_x\to\mathbf{R}.$$

有时记 $g_x(\ ,\ )$为$\langle\ ,\ \rangle_x$. 在此说"指定是 C^∞ 的", 是表示: 对于 M

的任意一个局部坐标系$(x_1, \cdots, x_n)$，如令

$$g_{ij}(x)=g_x\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right),$$

则这些$g_{ij}(x)$是坐标$(x_1, \cdots, x_n)$的C^∞函数、对于M中的任意向量场X、Y，定义M上的一个函数$g(X, Y)$如下：

$$g(X, Y)(x)=g_x(X_x, Y_x).$$

有时也记$g(X, Y)$为$\langle X, Y\rangle$. 易知：流形上总是存在黎曼度量的.

令TM是M的切丛，即$TM=\bigcup_x M_x$. M中的(切)向量场就是TM的截面. 我们把TM的截面的集合记作$\Gamma(TM)$.

定义1.1.1 设M是一个流形. M上的一个联络∇是一个映射

$$\nabla:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM):(X, Y)\mapsto\nabla_X Y,$$

它满足下列条件：

(i) $\nabla_X Y$关于变量X是$\mathscr{F}(M)$线性的. 就是说，对于任意X、W、X_1、$X_2\in\Gamma(M)$和M上的任意函数f(即$f\in\mathscr{F}(M)$)有

$$\nabla_{X_1+X_2}W=\nabla_{X_1}W+\nabla_{X_2}W,$$

$$\nabla_{fX}W=f\nabla_X W.$$

(ii) $\nabla_X(W_1+W_2)=\nabla_X W_1+\nabla_X W_2,$

$$\nabla_X(fW)=(Xf)W+f\nabla_X W.$$

定义1.1.2 设M是黎曼流形，M上的一个联络∇称为是Levi-Civita联络，如果它还满足

(iii) $X\langle W_1, W_2\rangle=\langle\nabla_X W_1, W_2\rangle+\langle W_1, \nabla_X W_2\rangle$;

(iv) $\nabla_X Y-\nabla_Y X=[X, Y]$.

其中$[X, Y]$是向量场X与Y的李括号.

定理1.1.3(Levi-Civita联络基本定理) 对于流形M上每一个黎曼度量g，总存在唯一的一个Levi-Civita联络.

证明 依次重复使用上述定义1.1.2中的(iii)，(iv)，(iii)，

(iv), (iii), (iv)等式于$\langle\nabla_X Y, Z\rangle$上, 得到

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y, Z\rangle &= X\langle Y, Z\rangle-\langle Y, \nabla_X Z\rangle\\
&= X\langle Y, Z\rangle-\langle Y, [X, Z]\rangle-\langle Y, \nabla_Z X\rangle\\
&= X\langle Y, Z\rangle-\langle Y, [X, Z]\rangle\\
&\quad -Z\langle Y, X\rangle+\langle\nabla_Z Y, X\rangle\\
&= \cdots\\
&= X\langle Y, Z\rangle-\langle Y, [X, Z]\rangle-Z\langle Y, X\rangle\\
&\quad +\langle[Z, Y], X\rangle+Y\langle Z, X\rangle-\langle Z, \nabla_Y X\rangle\\
&\quad -\langle Z, [Y, X]\rangle-\langle Z, \nabla_X Y\rangle.\end{aligned}$$

整理后得

$$\begin{aligned}\langle\nabla_X Y, Z\rangle=\frac{1}{2}\Big\{&-\langle X, [Y, Z]\rangle+X\langle Y, Z\rangle\\
&+\langle Y, [Z, X]\rangle+Y\langle Z, X\rangle\\
&+\langle Z, [X, Y]\rangle-Z\langle X, Y\rangle\Big\}.\end{aligned}$$

利用上式并作一点简单的说明即可知定理成立. ∎

定义 1.1.4 设∇是M上一个联络(不必是 Levi-Civita 联络), 令映射

$$R:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM);$$
$$(X, Y, Z)\mapsto R(X, Y)Z$$

由下式确定

$$R(X, Y)Z=(\nabla_X\nabla_Y-\nabla_Y\nabla_X-\nabla_{[X,Y]})Z.$$

则把上述映射$R(\ ,\ ,\ )$或$R(\ ,\ )$称为是∇的曲率.

习题 1.1.5 试证上述定义中的$R(X, Y)Z$对变元X, Y, Z皆是$\mathscr{F}(M)$线性的.

注 1.1.6 看了上述的定义 1.1.1 至定义 1.1.4 之后, 一定会感到: 除去在定理 1.1.3 的证明中需费点力气之外, 其余的只是给出黎曼度量、联络、曲率的定义而已. 难道当年的几何学大师高斯、黎曼及他们的后继者们花大力气作的竟是这么一点点吗? 表面上看, 情形似乎如此. 但如果把这些定义与算法的由来写下来, 把根据上述定义演化出来的一些几何算法写下来, 那就会感到非几

何学大师是不足当此重任的. 具体一点来讲, 例如有一个难点我们就没有写出来, 那就是: 由上面一串复杂手续定义出来的曲率, 事实上能表现 M 在高维欧氏空间放置时的某种弯曲程度. 这正是 Egregium 定理的要点. 论证这个难点(或要点)的技巧是一个"可积条件的求法". 在这一节末证明 Bianchi 等式时, 用的就是这个"可积性条件的求法". 但很遗憾, 我们不能在此说透这个"可积性条件的求法". 希望读者在证明 Bianchi 等式时去体会. 在以后的活动标架法中, 这个"求法"化为微分式的计算. 那时体会起来就容易了.

注 1.1.7 联络的概念是高斯、黎曼身后的一些数学家们发现的. 又经过多年的演化之后, 这个概念变得非常重要了. 它在几何学中的作用可以从三个方面叙述: (1) 它是从黎曼度量算出曲率这一过程中的一个中间站. 正像平面几何学中的一条"神妙的"辅助线一样, 它的出现使计算曲率的过程变得清晰易懂. (2) 它具有"平移"的几何意义, 使得能够类比欧氏几何学而引出协变导数的概念, 从而开辟了流形(不一定是欧氏空间 $\mathbf{R}^N$)上的分析学. (3) 某种类型的联络构成一种集合, 它引导出的商空间称为模空间. 这种模空间为几何学提供了难得的空间实例. 人们对这种"珍奇"空间的认识大大推进了低维拓扑学的发展.

现在我们介绍 Bianchi 等式. 为此先定义曲率的协变导数的概念, 设 $X\in\Gamma(TM)$. 曲率映射

$$R:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM):\\ (Y, Z, W)\mapsto R(Y, Z, W)$$

沿 X 方向的协变导数是一个映射:

$$\nabla_X R:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM):(Y, Z, W)\\ \mapsto(\nabla_X R)(Y, Z, W),$$

满足下列等式:

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W)=\nabla_X R(Y, Z, W)-R(\nabla_X Y, Z, W)\\ -R(Y, \nabla_X Z, W)-R(Y, Z, \nabla_X W).$$

容易证明 $(\nabla_X R)(Y, Z, W)$ 关于变元 X, Y, Z, W 皆是

$\mathscr{F}(M)$线性的.

定理1.1.8 设 M 是黎曼流形, ∇ 是 Levi-Civita 联络, 则对任意的 $X, Y, Z, W\in\Gamma(TM)$有下列等式成立:

(i) (Bianchi I)

$$R(X, Y)Z+R(Z, X)Y+R(Y, Z)X=0;$$

(ii) (Bianchi II)

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W)+(\nabla_Z R)(X, Y, W)+(\nabla_Y R)(Z, X, W)=0.$$

证明 由于

$$\begin{aligned}[X, [Y, Z]]&=\nabla_X[Y, Z]-\nabla_{[Y,Z]}X\\&=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_X\nabla_Z Y-\nabla_{[Y,Z]}X,\\ [Z, [X, Y]]&=\nabla_Z\nabla_X Y-\nabla_Z\nabla_Y X-\nabla_{[X,Y]}Z,\\ [Y, [Z, X]]&=\nabla_Y\nabla_Z X-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[Z,X]}Y.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&[X, [Y, Z]]+[Z, [X, Y]]+[Y, [Z, X]]\\&=R(X, Y)Z+R(Z, X)Y+R(Y, Z)X.\end{aligned}$$

由李括号的 Jacobi 恒等式, 即得(i)中 Bianchi 第一等式成立. 由于

$$\begin{aligned}(\nabla_X R)(Y, Z, W)&=\nabla_X(R(Y, Z, W))-R(\nabla_X Y, Z, W)\\&\quad-R(Y, \nabla_X Z, W)-R(Y, Z, \nabla_X W)\\&=\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W-\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W-\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W\\&\quad-\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z W+\nabla_Z\nabla_{\nabla_X Y}W+\nabla_{[\nabla_X Y,Z]}W\\&\quad-\nabla_Y\nabla_{\nabla_X Z}W+\nabla_{\nabla_X Z}\nabla_Y W+\nabla_{[Y,\nabla_X Z]}W\\&\quad-\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W+\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W\\&\quad+\nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W.\end{aligned}$$

故若令

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y, Z, W)&=\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W-\nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W\\&\quad-\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W+\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W,\\ \beta(X, Y, Z, W)&=-\nabla_X\nabla_{\nabla_Y Z}W+\nabla_X\nabla_{\nabla_Z Y}W\\&\quad+\nabla_Z\nabla_{\nabla_X Y}W-\nabla_Y\nabla_{\nabla_X Z}W,\end{aligned}$$

$$\gamma(X, Y, Z, W) = -\nabla_{\nabla_X Y}\nabla_Z W + \nabla_{\nabla_X Z}\nabla_Y W + \nabla_{\nabla_Y Z}\nabla_X W - \nabla_{\nabla_Z Y}\nabla_X W,$$

$$\delta(X, Y, Z, W) = \nabla_{[\nabla_X Y, Z]}W - \nabla_{[\nabla_X Z, Y]}W.$$

则

$$(\nabla_X R)(Y, Z, W) = \alpha(X, Y, Z, W) + \beta(X, Y, Z, W) + \gamma(X, Y, Z, W) + \delta(X, Y, Z, W).$$

容易验证

$$\alpha(X, Y, Z, W) + \alpha(Z, X, Y, W) + \alpha(Y, Z, X, W) = 0,$$

$$\beta(X, Y, Z, W) + \beta(Z, X, Y, W) + \beta(Y, Z, X, W) = 0,$$

$$\gamma(X, Y, Z, W) + \gamma(Z, X, Y, W) + \gamma(Y, Z, X, W) = 0.$$

以及

$$\delta(X, Y, Z, W) + \delta(Z, X, Y, W) + \delta(Y, Z, X, W) = \nabla_{[[X,Y],Z]+[[Z,X],Y]+[[Y,Z],X]}W.$$

因此利用 Jacobi 等式, 便得 Bianchi II 的证明. 定理证毕. ∎

§1.2 幺正标架法

上节在给出黎曼几何的概念与计算时是用了一种不变观点来陈述的. 这里"不变"两字的意思是指在陈述中不借助局部坐标系或其他计算参照系, 因而计算公式等不因加入参照系后而有所改变. 这一节我们介绍一种借助幺正标架来进行计算的方法. 同一个几何量会因为选取不同的幺正标架场而有不同的表现值. 因此这和不变观点恰恰相反.

设 M 是 n 维黎曼流形. 定义在 M 的一个开集 U 上的标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 称为是幺正的, 如果

$$\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}, \quad \forall i, \ j = 1, \cdots, n.$$

其中
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果 } i=j;\\ 0, & \text{如果 } i\neq j.\end{cases}$$

假设我们在开集 U 上选定一个幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$，于是可以将几何量 g, ∇, $R(,)$, ∇R 可表现为 U 上的函数集合.

$$g_{ij}=g(E_i, E_j)\equiv\langle E_i, E_j\rangle,$$
$$\Gamma_{ij}^k=\langle\nabla_{E_i}E_j, E_k\rangle,$$
$$R_{ijkl}=-\langle R(E_i, E_j)E_k, E_l\rangle,$$
$$R_{ijkl,s}=-\langle(\nabla_{E_s}R)(E_i, E_j, E_k), E_l\rangle.$$

命题 1.2.1 设 M 是黎曼流形，∇ 是 Levi-Civita 联络，R 与 ∇R 的定义同前. 若在 M 上取定幺正标架场，则有

(i) $g_{ij}=\delta_{ij}$;

(ii) $\Gamma_{ij}^k=\dfrac{1}{2}(C_{ij}^k+C_{kj}^i+C_{ki}^j)$,

其中 C_{ij}^k 由下式确定：

$$[E_i, E_j]=\sum_k C_{ij}^k E_k;$$

(iii) $$R_{ijkl}=-E_i\Gamma_{jk}^l+E_j\Gamma_{ik}^l-\sum_s\Gamma_{jk}^s\Gamma_{is}^l+\sum_s\Gamma_{ik}^s\Gamma_{js}^l+\sum_s C_{ij}^s\Gamma_{sk}^l;$$

(iv) $$R_{ijkl,s}=E_sR_{ijkl}-\sum_t R_{tjkl}\Gamma_{si}^t-\sum_t R_{itkl}\Gamma_{sj}^t-\sum_t R_{ijtl}\Gamma_{sk}^t-\sum_t R_{ijkt}\Gamma_{sl}^t;$$

(v) $R_{ijkl}+R_{kijl}+R_{jkil}=0$;

(vi) $R_{ijkl,s}+R_{sikl,j}+R_{jskl,i}=0$.

证明 因为 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是幺正标架场，故(i)成立. 在定理 1.1.3 的证明中令 $X=E_i$, $Y=E_j$, $Z=E_k$，便得到(ii). 根据定义 1.1.4 和 R_{ijkl} 的定义可直接算出(iii). (iv)也由定义直接导出. (v)与(vi)是定理 1.1.8 中的 Bianchi I 与 Bianchi II 在适当选取 X、Y、Z、W 时的情形. ▌

命题 1.2.2 假设同前，则

(vii) $\Gamma_{ij}^k=-\Gamma_{ik}^j$, $R_{ijkl}=-R_{ijlk}$, $R_{ijkl,s}=-R_{ijlk,s}$;

(viii) $R_{ijkl}=-R_{jikl}$, $R_{ijkl,s}=-R_{jikl,s}$;

(ix) $R_{ijkl}=R_{klij}$, $R_{ijkl,s}=R_{klij,s}$.

证明 由命题1.2.1中(ii)与(iii)和等式$C^k_{ij}=-C^k_{ji}$便得到(vii). 由等式$R(X, Y)=-R(Y, X)$等便得到(viii). (ix)的证明如下:由

$$\begin{aligned}R_{ijkl}&=-R_{kijl}-R_{jkil}=R_{kilj}+R_{jkli}\\&=(-R_{lkij}-R_{ilkj})+(-R_{ljki}-R_{klji})\\&=2R_{klij}+R_{iljk}+R_{ljik}=2R_{klij}-R_{jlik}\\&=2R_{klij}-R_{ijkl}\end{aligned}$$

知(ix)中第一式成立.类似地可得到第二式. 证毕. ▮

在上面我们用$\{\Gamma^k_{ij}, R_{ijkl}, R_{ijkl,s}\}$表现$\{\nabla, R, \nabla R\}$的时候,我们预先选好了$\{E_1, \cdots, E_n\}$. 如果另外又选了一个幺正标架场$\{\widetilde{E}_1, \cdots, \widetilde{E}_n\}$, 虽然$\{\nabla, R, \nabla R\}$没有变化, 但是它们的表现$\{\widetilde{\Gamma}^k_{ij}, \widetilde{R}_{ijkl}, \widetilde{R}_{ijkl,s}\}$已和原先的不同了. 关于如何变化的规律,请看下列习题.

习题1.2.3 设M是n维黎曼流形, 在M的一个开集U上选取两个幺正标架场$\{E_1, \cdots, E_n\}$和$\{\widetilde{E}_1, \cdots, \widetilde{E}_n\}$,则易见存在函数矩阵

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\\vdots&&\vdots\\A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{pmatrix}:U\to O(n),$$

使得
$$(\widetilde{E}_1, \cdots, \widetilde{E}_n)=(E_1, \cdots, E_n)\cdot A.$$
其中$O(n)$是n阶幺正方阵的集合,即
$$O(n)=\{A\in GL(n, \mathbf{R})\mid A\cdot A^t=1\},$$
上式中的记号A^t表示矩阵A的转置. 于是试证

$$\widetilde{\Gamma}^k_{ij}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma}A_{\alpha i}A_{\beta j}A_{\gamma k}\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}+\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha i}(E_\alpha A_{\beta j})\cdot A_{\beta k},$$

$$\widetilde{R}_{ijkl}=\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}A_{\alpha i}A_{\beta j}A_{\gamma k}A_{\delta l}R_{\alpha\beta\gamma\delta},$$

并写出$\widetilde{R}_{ijkl,s}$与$R_{ijkl,s}$间的关系.

以上是在幺正标架场$\{E_1, \cdots, E_n\}$下表现§1中的全部计

算. 事实上,在别的标架场下也能作出类似的表现. 例如在 M 上选取局部坐标系 $\{x_1, \cdots, x_n\}$ 之后, 便有自然标架场 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$, 仿照前面的定义也有 g_{ij}, Γ_{ij}^k, R_{ijkl}, $R_{ijkl,s}$. 由于 $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ 与 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是不同的, 表现在 g_{ij} 时不等于 δ_{ij}, 以及

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]=0,$$

所以得到的命题1.2.1、命题1.2.2与习题1.2.3和前面的有些不同. 对于一般的标架场, 自然也可作类似的考虑, 得到的结果会更复杂些, 但总是能行的. 总之, 在标架场下, 可以表现§1.1中的几何概念、计算与等式, 虽然表现出来的量, 例如 Γ_{ij}^k、R_{ijkl} 等随着标架场的改变而变化, 摒弃了§1中的不变观点的作法, 但是现在的作法和§1中的作法在作计算推理时几乎是一样的, 没有自己的特点. 下面将介绍的幺正标架法就不同了, 它有自己的推理特点, 比§1中的有所改进. 主要体现在用微分式的计算使推理更简洁. 为了介绍幺正标架法, 我们先对微分式说几句: 流形上微分式的概念及计算大家已经熟悉了. 不然, 可以参阅本书开头提到的文献. 在这里我们只想解说一件事, 即微分式与流形上向量场之间存在的配对关系. 我们已经知道微分式的定义可以不借助向量场这个概念, 这正如文献[6]与[27]中所说的. 但是微分式与向量场之间存在着配对关系, 以致微分式可以看成向量场上的偏线性函数. 不过, 上面谈到的配对关系不是唯一的, 先后流行在几何文献中的配对关系有两个. 所以希望大家注意其中的差别. 下面介绍配对关系:

$$B: \Lambda^k(M)\times[\underbrace{\Gamma(TM)\times\cdots\times\Gamma(TM)}_{k\text{个}}]\to\mathscr{F}(M):$$

$$(\omega, X_1, \cdots, X_k)\mapsto\omega(X_1, \cdots, X_k).$$

上式中 $\omega\in\Lambda^k(M)$ 及 $\omega(X_1, \cdots, X_k)$ 由下列两个条件唯一确定:

(i) $\omega(X_1, \cdots, X_k)$ 对于变元 $\omega, X_1, \cdots, X_k$ 皆是 $\mathscr{F}(M)$

线性的；

(ii) 若 $f_1, \cdots, f_k \in \mathscr{F}(M)$,

$$((df_1)\wedge\cdots\wedge(df_k))(X_1, \cdots, X_k) = \begin{vmatrix} X_1f_1 & \cdots & X_kf_1 \\ \vdots & & \vdots \\ X_1f_k & \cdots & X_kf_k \end{vmatrix}.$$

采用上述配对 $\omega(X_1, \cdots, X_k)$, 便有下列计算公式:

(iii) 若 $\omega_1 \in \Lambda^p(M)$, $\omega_2 \in \Lambda^q(M)$,

$$(\omega_1\wedge\omega_2)(X_1, \cdots, X_{p+q}) = \frac{1}{p!q!}\sum_{\pi}\omega_1(X_{\pi(1)}, \cdots X_{\pi(p)})\omega_2(X_{\pi(p+1)}, \cdots, X_{\pi(p+q)}),$$

其中 π 是 $(1, \cdots, p+q)$ 的排列.

(iv) 若 $\omega \in \Lambda^p(M)$,

$$(d\omega)(X_1, \cdots, X_{p+1}) = \sum_{j=1}^{p+1}(-1)^{j+1}X_j\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_{p+1}) + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, \hat{X}_j, \cdots X_{p+1}).$$

现在我们来介绍幺正标架法. 设 M 是 n 维黎曼流形, 选取局部幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ (定义在开集 U 上), 用下列等式定义 U 上一组一次微分式 $\{\omega_{ij}\}$ 和一组二次微分式 $\{\Omega_{ij}\}$:

$$\nabla_X E_i = \sum_j \omega_{ji}(X)E_j,$$

$$R(X, Y)E_i = \sum_j \Omega_{ji}(X, Y)E_j.$$

其中 $i=1, \cdots, n$. 有时为方便计, 我们记

$$\sigma = \{E_1, \cdots, E_n\},$$

$$\omega_\sigma \equiv \omega = \begin{pmatrix} \omega_{11} & \cdots & \omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\Omega_\sigma \equiv \Omega = \begin{pmatrix} \Omega_{11} & \cdots & \Omega_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \Omega_{n1} & \cdots & \Omega_{nn} \end{pmatrix}.$$

易见　　$\Gamma_{ij}^k = \omega_{kj}(E_i)$, $R_{ijkl} = -R_{ijlk} = \Omega_{kl}(E_i, E_j)$.

令 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 是 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的对偶标架场，即 ω_i 是一次微分式，且

$$\omega_i(E_j) = \delta_{ij}.$$

这时有

$$\omega_{ij} = \sum_k \Gamma_{kj}^i \omega_k,$$

$$\Omega_{ij} = \sum_{k<l} R_{klij} \omega_k \wedge \omega_l.$$

可见 $\{\Gamma_{ij}^k, R_{ijkl}\}$ 与 $\{\omega_{ij}, \Omega_{ij}\}$ 彼此能互相表示，但是对 ω_{ij}、Ω_{ij} 进行微分式的计算可以代替§1中的许多推理.

引理 1.2.4　下列各式成立：

(i) $\begin{cases} d\omega_i = \sum_j \omega_{ji} \wedge \omega_j, \\ \omega_{ij} = -\omega_{ji}; \end{cases}$

(ii) $\Omega_\sigma = d\omega_\sigma + \omega_\sigma \wedge \omega_\sigma$;

(iii) 设有 A: $U \to O(n)$，其中 U 是幺正标架场 σ 的定义域，则

$$\omega_{\sigma\cdot A} = A^{-1} \cdot \omega_\sigma \cdot A + A^{-1} \cdot dA;$$

(iv) $\Omega_{\sigma\cdot A} = A^{-1} \cdot \Omega_\sigma \cdot A$.

证明　利用定义 1.1.2(iii)，有

$$\begin{aligned} \omega_{ij}(X) &= \langle \nabla_X E_j, E_i \rangle = X\langle E_j, E_i \rangle - \langle E_j, \nabla_X E_i \rangle \\ &= -\langle E_j, \nabla_X E_i \rangle = -\omega_{ji}(X), \end{aligned}$$

其中 X 是 M 上的向量场，所以(i)成立．对于 M 上任意的向量场 X、Y，有

$$(d\omega_i)(X, Y) = X\omega_i(Y) - Y\omega_i(X) - \omega_i([X, Y]);$$

$$\begin{aligned} &(\sum_j \omega_{ji} \wedge \omega_j)(X, Y) \\ &\qquad = \sum_j (\omega_{ji}(X)\omega_j(Y) - \omega_{ji}(Y)\omega_j(X)). \end{aligned}$$

令以上两式的右端分别为 α_i、β_i，于是由定义 1.1.1 有

$$\sum_i \alpha_i E_i = \sum_i (X\omega_i(Y))E_i - \sum_i (Y\omega_i(X))E_i$$
$$-\sum_i \omega_i([X, Y])E_i$$
$$= \nabla_X (\sum_i \omega_i(Y)E_i) - \sum_i \omega_i(Y)\nabla_X E_i$$
$$-\nabla_Y (\sum_i \omega_i(X)E_i) + \sum_i \omega_i(X)\nabla_Y E_i - [X, Y]$$
$$= \nabla_X Y - \sum_{i,j} \omega_i(Y)\omega_{ji}(X)E_j - \nabla_Y X$$
$$+\sum_{i,j} \omega_i(X)\omega_{ji}(Y)E_j - [X, Y].$$

利用定义1.1.2(iv)和前面证过的等式 $\omega_{ij}=-\omega_{ji}$, 可知

$$\sum_i \alpha_i E_i = \sum_i \beta_i E_i,$$

从而
$$\alpha_i = \beta_i.$$

于是便证得(i). 为证明(ii)时, 我们把 ω_σ 记为 ω. 由 ω 的定义可知

$$\nabla_X\nabla_Y\sigma = \nabla_X(\sigma\cdot\omega(Y)) = (\nabla_X\sigma)\cdot\omega(Y) + \sigma\cdot X\omega(Y)$$
$$= \sigma\cdot\{\omega(X)\cdot\omega(Y) + X\omega(Y)\}.$$

故有

$$R(X, Y)\sigma = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})\sigma$$
$$= \sigma\cdot\{\omega(X)\cdot\omega(Y) + X\omega(Y) - \omega(Y)\cdot\omega(X)$$
$$-Y\omega(X) - \omega([X, Y])\}$$
$$= \sigma\cdot\{(d\omega)(X, Y) + (\omega\wedge\omega)(X, Y)\},$$

从而
$$\Omega = d\omega + \omega\wedge\omega.$$

由下列计算

$$\nabla_X(\sigma\cdot A) = (\nabla_X\sigma)\cdot A + \sigma\cdot XA$$
$$= \sigma\{\omega_\sigma(X)\cdot A + XA\}$$
$$= (\sigma\cdot A)\{A^{-1}\cdot\omega_\sigma(X)\cdot A + A^{-1}\cdot XA\}$$
$$= (\sigma\cdot A)\{(A^{-1}\cdot\omega_\sigma\cdot A + A^{-1}\cdot dA)(X)\},$$

和 $\omega_{\sigma.A}$ 的定义等式

$$\nabla_X(\sigma\cdot A) = (\sigma\cdot A)\omega_{\sigma.A}(X),$$

故知(iii)成立. 由于 $R(X, Y)Z$ 对变元 Z 是 $\mathscr{F}(M)$线性的, 故

$$R(X,Y)(\sigma\cdot A)=(R(X,Y)\sigma)\cdot A=(\sigma\Omega_\sigma(X,Y))\cdot A$$
$$=(\sigma\cdot A)(A^{-1}\cdot\Omega_\sigma(X,Y)\cdot A),$$

易见(iv)成立. 从而引理证毕. ▌

引理1.2.5 设 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 是幺正标架场，记它的对偶标架场为 $\{\omega_1,\cdots,\omega_n\}$，则下列方程有唯一解 θ_{ij}：

$$\begin{cases}d\omega_i=\sum_j\theta_{ji}\wedge\omega_j,\\ \theta_{ij}=-\theta_{ji}.\end{cases}$$

证明 首先证明解是唯一的.设上述方程有两个解 θ 与 θ'，其中

$$\theta=\begin{pmatrix}\theta_{11}&\cdots&\theta_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \theta_{n1}&\cdots&\theta_{nn}\end{pmatrix},\ \theta'=\begin{pmatrix}\theta'_{11}&\cdots&\theta'_{1n}\\ \vdots&&\vdots\\ \theta'_{n1}&\cdots&\theta'_{nn}\end{pmatrix}.$$

令
$$\alpha=\theta-\theta',$$
即
$$\alpha_{ij}=\theta_{ij}-\theta'_{ij}.$$
于是 α 满足
$$\begin{cases}\sum_j\alpha_{ji}\wedge\omega_j=0,\\ \alpha_{ij}=-\alpha_{ji}.\end{cases}$$

现在来证明上述方程只有零解，即 $\alpha_{ij}=0$. 因为 α_{ij} 总可表为：

$$\alpha_{ij}=\sum_k\alpha_{ijk}\omega_k.$$

于是从 α 满足的方程可推知

$$\begin{cases}\alpha_{ijk}=\alpha_{kji},\\ \alpha_{ijk}=-\alpha_{jik}.\end{cases}$$

从 α_{ijk} 出发轮流使用上述方程的第一式和第二式，便得

$$\alpha_{ijk}=\alpha_{kji}=-\alpha_{jki}=-\alpha_{ikj}=\alpha_{kij}=\alpha_{jik}=-\alpha_{ijk}.$$

由此可知
$$\alpha_{ijk}=0.$$

这就证明了 $\alpha_{ij}=0$，即引理中的方程至多有一个解. 至于解的存在性，可仿照上面的方法从 θ_{ijk} 出发轮流使用下列两个等式

$$\begin{cases}\theta_{ijk}=\theta_{kji}+f_{jki},\\ \theta_{ijk}=-\theta_{jik},\end{cases}$$

便可求得 θ_{ijk}. 上面的 θ_{ijk}、f_{ijk} 由下式定义：

$$\theta_{ij}=\sum_k \theta_{ijk}\omega_k,$$

$$d\omega_i=\sum_{j<k} f_{ijk}\omega_j\wedge\omega_k.$$

于是引理1.2.5证毕. ▌

引理1.2.5保证了从引理1.2.4(i)解出ω_{ij}，即解出Levi-Civita联络.

引理1.2.6 记号同上,则有

(i) $\sum_j \Omega_{ji}\wedge\omega_j=0$;

(ii) $d\Omega_{ij}=\sum_k(\Omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\omega_{ik}\wedge\Omega_{kj})$.

证明 由下列的直接计算可得引理的证明:

$$\begin{aligned}O=dd\omega_i&=d(\sum_j \omega_{ji}\wedge\omega_j)=\sum_j(d\omega_{ji}\wedge\omega_j-\omega_{ji}\wedge d\omega_j)\\&=\sum_j(\Omega_{ji}-\sum_k\omega_{jk}\wedge\omega_{ki})\wedge\omega_j-\sum_j\omega_{ji}\wedge(\sum_k\omega_{kj}\wedge\omega_k)\\&=\sum_j\Omega_{ji}\wedge\omega_j.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d\Omega_{ij}&=d(d\omega_{ij}+\sum_k\omega_{ik}\wedge\omega_{kj})=\sum_k(d\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\omega_{ik}\wedge d\omega_{kj})\\&=\sum_k(\Omega_{ik}-\sum_l\omega_{il}\wedge\omega_{lk})\wedge\omega_{kj}\\&\quad-\sum_k\omega_{ik}\wedge(\Omega_{kj}-\sum_l\omega_{kl}\wedge\omega_{lj})\\&=\sum_k(\Omega_{ik}\wedge\omega_{kj}-\omega_{ik}\wedge\Omega_{kj}),\end{aligned}$$

可见引理1.2.6成立. ▌

引理1.2.6中(i)与(ii)其实就是定理1.1.8中的Banchi I和Banchi II，也是命题1.2.1中的(v)、(vi). 解释这件事作为习题留给读者. 我们把这一节中在幺正标架场下进行微分式计算的这套方法叫幺正标架法.

习题1.2.7 设$\{E_1, \cdots, E_n\}$是标架场,$\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$是它的对偶标架场,若有

$$d\omega_i=-\sum_{j<k} f^i_{jk}\omega_j\wedge\omega_k,$$

则

$$[E_i, E_j]=\sum_k f^k_{ij}E_k.$$

§1.3 活动标架法——主丛及其上的联络

上一节介绍的幺正标架法有两个特点：其一是用标架场为参照系来处理几何问题．这不但摒弃了不变观点的作法，而且也和传统的笛卡儿坐标法不同．在笛卡儿坐标法中只选用一个标架为参照系．而现在选用了许多标架(即标架场)；第二个特点是：采用微分式的算法取代以往的计算．幺正标架法的进一步推广就是本节要介绍的*活动标架法*．这个推广自然是对幺正标架法中两个特点认识的深化所致．第一个特点来源于早先人们对一个物体运动的研究．在研究物体运动时，人们曾经采用固定在该物体上的标架为参照系．这个标架随着物体一起运动(即标架随时间而变化)，因而被称为*活动标架*．后来在研究空间性质时，采用了一种类似的考虑，选用的标架随地点而变化．正如上节中的幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 一样，因而这种标架场也就叫作*活动标架*了．对于一个几何问题，如果选取"好"的活动标架，就会在处理问题时事半功倍．可是什么是"好"的活动标架呢？本书不对这个问题作正面的回答．我们关心的是："活动标架"这一观念应具有什么样的基本性质．随着人们对幺正标架法中第二特点的深入理解，出于对那套微分式算法的精确与完善要求，人们对"活动标架"加上了一点限制，就可把活动标架理解为某一个主丛的局部截面(见下面的介绍)．确切地讲，活动标架(场)的集合一一对应于某一个主丛上局部截面的集合．这样的理解使活动标架法升华为主丛上的*联络论*．这是一个进步．但是也有不自然的一面，例如一个流形上所有由局部坐标系给出的自然标架场的集合就不能是某一个主丛的局部截面的集合了．

定义 1.3.1 设 M 是一个流形，G 是一个群．一个 M 上的 *G 主丛* $(P, \pi: P\to M, m: P\times G\to P)$ 是由下列三个概念组成的：

(1) 拓扑空间 P 称为*主丛的全空间*．

(2) 连续映射 $\pi: P\to M$, 称为投射.

(3) $m: P\times G\to P: (p, g)\mapsto p\cdot g$, 它是 G 在 P 上的一个右作用, 即有以下两式成立:

(i) $p\cdot e=p$; $\forall p\in P$, e 是 G 的单位元.

(ii) $(p\cdot g_1)\cdot g_2=p\cdot(g_1\cdot g_2)$, $\forall p\in P$; g_1、$g_2\in G$.

此外还满足局部平凡化条件, 即对于任意的 $x\in M$, 存在 x 的一个邻域 $U\subset M$ 以及一个同胚 $\Phi: U\times G\to\pi^{-1}(U)$, 使得

(i) $\pi\cdot\Phi: U\times G\to U$ 是向第一因子的投射;

(ii) $\Phi(u, g_1)\cdot g_2=\Phi(u, g_1\cdot g_2)$, $\forall u\in U$; g_1、$g_2\in G$.

以后通常把主丛简记为 $\pi: P\to M$ 或 P. 我们把 G 与 M 分别称为主丛 P 的*结构群*与*底空间*. 把 $F_x=\pi^{-1}(x)$ 称为主丛 P 的*纤维*, 把上述的 Φ 称作主丛 P 的一个*局部平凡化*.

为了以后作分析运算的需要, 我们假定定义1.3.1中的一切概念都是 C^∞ 的, 即 P 是微分流形、投射 π、右作用 m、局部平凡化 Φ 以及以后出现的一切概念都是 C^∞ 的.

习题1.3.2 设 P 是一个 G 主丛, 试证:

(1) 对任意 $x\in M$, $\pi^{-1}(x)$ 与 G 同胚;

(2) G 在 P 上的右作用 $m: P\times G\to P$ 是自由的, 即若 g 不是 G 的幺元 e, 则映射

$$m(\cdot, g): P\to P: p\mapsto p\cdot g$$

没有不动点.

(3) $\pi(p\cdot g)=\pi(p)$, $\forall p\in P$, $g\in G$;

(4) 对任意 p_1、$p_2\in P$, 若 $\pi(p_1)=\pi(p_2)$, 则存在唯一的 $g\in G$, 使得 $p_2=p_1\cdot g$.

定义1.3.3 设 $\pi: P\to M$ 是一个 G 主丛. 一个 C^∞ 映射 $\sigma: U\to P$ 称为是主丛的一个*局部截面*, 如果 $\pi\circ\sigma=id: U\to U$, 其中 U 是 M 中的开集, id 是恒同映射. 我们把 P 的所有局部截面的集合记作 $\mathrm{MF}(P)$.

习题1.3.4 (i) 设 M 是 n 维黎曼流形. 令 $O(M)$ 是 M 上所有幺正标架的集合, 试证: $O(M)$ 是 $O(n)$ 主丛. (ii) 试证: $O(n)$

主丛 $O(M)$ 的局部截面就是 M 上的局部幺正标架场，并且反之亦然。

注 1.3.5 上面的习题说明 M 上的幺正标架场的集合就是主丛 $O(M)$ 的局部截面的集合 $\mathrm{MF}(O(M))$. 因此我们想象中的幺正标架场的集合的推广可以定义为某一个主丛 P 的局部截面的集合 $\mathrm{MF}(P)$，于是这个 $\mathrm{MF}(P)$ 又可称为活动标架的集合. 这里 MF 是 Moving frames 一词的缩写.

定义 1.3.6 设 $\pi: P\to M$ 是 M 上一个 G 主丛. P 的任意一个局部截面 $\sigma: U\to P$ 称为是一个类型 P 的活动标架. 类型 P 的活动标架的集合记作 $\mathrm{MF}(P)$.

回忆 §1.2 中的幺正标架法，在那里除去定义幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 之外，便是定义 ω_σ、Ω_σ，以及找出计算它们的公式. 现在当我们讨论活动标架法时，自然是在作平行的推广.

定义 1.3.7 设 $\pi: P\to M$ 是 M 上一个 G 主丛. 假若每一个类型 P 的活动标架 $\sigma\in\mathrm{MF}(P)$ 都对应着一个 ω_σ，使得对于每一个 $g: U\to G$，有

$$\omega_{\sigma\cdot g}=g^{-1}\cdot\omega_\sigma\cdot g+g^{-1}\cdot dg.$$

其中 U 是 σ 的定义域. ω_σ、$g^{-1}\cdot\omega_\sigma\cdot g$、$g^{-1}\cdot dg$ 是 §1.2 中引理 1.2.4(iii) 用到的诸概念在现在一般 G 主丛时的推广. 这些推广将在注 1.3.7′ 中作简要介绍. 我们把上面提到的对应 $\sigma\mapsto\omega_\sigma$，或者集合 $\{\omega_\sigma|\sigma\in\mathrm{MF}(P)\}$ 称为主丛 P 上的联络.

注 1.3.7′ 设 G 是一个李群，$e\in G$ 是单位元. 令

$$\mathfrak{G}=T_eG,$$

并称 $\mathfrak{G}$ 为 G 的李代数. 这里当然要预先给出 $\mathfrak{G}$ 中的李代数结构，以使这个名称有意义. T_eG 是切空间，故 $\mathfrak{G}$ 内有向量空间结构. 若

$$X、Y\in T_eG,$$

则在 G 上定义向量场 $\widetilde{X}$、$\widetilde{Y}$ 如下：

$$\widetilde{X}(g)=(L_g)_*X,\ \forall g\in G;$$
$$\widetilde{Y}(g)=(L_g)_*Y,\ \forall g\in G.$$

其中
$$(L_g)_*:\ T_eG\to T_gG$$

由下列映射诱导：

$$L_g:\ G\to G:\ p\mapsto g\cdot p,\ \forall p\in G.$$

令
$$[X,\ Y]=[\tilde{X},\ \tilde{Y}](e),$$

其中$[\tilde{X},\ \tilde{Y}]$是向量场$\tilde{X}$、$\tilde{Y}$的李括号，它仍然是一个向量场．于是便有

$$[\ ,\ ]:\ T_eG\times T_eG\to T_eG:\ (X,\ Y)\mapsto[X,\ Y]$$
$$=[\tilde{X},\ \tilde{Y}](e).$$

易证T_eG中向量空间结构与李括号(积)，使T_eG成为一个李代数．这个李代数仍记为$\mathfrak{G}$．对于$g\in G$，令

$$Ad(g)=(R_{g^{-1}})_*(L_g)_*:\ \mathfrak{G}\to\mathfrak{G},$$

其中
$$(R_{g^{-1}})_*:\ T_gG\to T_eG=\mathfrak{G}$$

由下列映射诱导

$$R_{g^{-1}}:\ G\to G:\ p\mapsto p\cdot g^{-1}.$$

现在来解释定义1.3.7中的各记号．首先有

$$\omega_\sigma\in A^1(U)\otimes\mathfrak{G}.$$

若由$Ad(g)$诱导出

$$1\otimes Ad(g):\ A^1(U)\otimes\mathfrak{G}\to A^1(U)\otimes\mathfrak{G}.$$

则$g^{-1}\cdot\omega_\sigma\cdot g$解释为$(1\otimes Ad(g^{-1}))\omega_\sigma$．最后解释$A^1(U)\otimes\mathfrak{G}$中的$g^{-1}\cdot dg$，其中$g:U\to G$．对于$U$上任意切向量$W\in T_xU$，令

$$(g^{-1}\cdot dg)(W)=(L_{g_0^{-1}})_*g_*(W)\in T_eG=\mathfrak{G},$$

其中
$$g_0=g(x)\in G.$$

定义1.3.8 设$\pi:\ P\to M$是G主丛，$\{\omega_\sigma\}$是其上的一个联络．仿照引理1.2.4(ii)，令曲率为

$$\Omega_\sigma=d\omega_\sigma+\frac{1}{2}[\omega_\sigma,\ \omega_\sigma].$$

其中$[\omega_\sigma,\ \omega_\sigma]$的定义如下：一般地，对于

$$\omega_1\in A^p(U)\otimes\mathfrak{G},\ \ \omega_2\in A^q(U)\otimes\mathfrak{G},$$

则可定义
$$[\omega_1,\ \omega_2]\in A^{p+q}(U)\otimes\mathfrak{G}.$$

作法是在$\mathfrak{G}$中取定向量空间的基$\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_{\dim\mathfrak{G}}\}$，于是

$$\omega_1=\sum_i \alpha_i \otimes X_i,$$

$$\omega_2=\sum_i \beta_i \otimes X_i.$$

则取
$$[\omega_1,\ \omega_2]=\sum_{i,j}(\alpha_i\wedge\beta_j)\otimes[X_i,\ X_j].$$

通过简单验证可知 $[\omega_1, \omega_2]$ 的定义与基 $\{X_1, \cdots, X_{\dim\mathfrak{G}}\}$ 的选取无关，从而$[\omega_1, \omega_2]$的定义便是合理的了.

引理 1.3.9 设 σ 是主丛 P 的一个局部截面，U 是它的定义域．则对任意的 $g: U\to G$,

$$\Omega_{\sigma\cdot g}=g^{-1}\cdot\Omega_\sigma\cdot g,$$

其中 $g^{-1}\cdot\Omega_\sigma\cdot g$ 的意义仿注 1.3.7′ 中的 $g^{-1}\cdot\omega_\sigma\cdot g$, 定义为

$$g^{-1}\cdot\Omega_\sigma\cdot g=(1\otimes Ad(g^{-1}))\Omega_\sigma.$$

引理 1.3.10 下列 Bianchi II 成立：

$$d\Omega_\sigma=[\Omega_\sigma,\ \omega_\sigma].$$

引理 1.3.9 与引理 1.3.10 是引理 1.2.4(iv) 与引理 1.2.6 (ii)的推广．从原则上讲，证明是类似的．不过对初次接触李群的读者来说，证明引理 1.3.9 与引理 1.3.10 并不容易．这需要对引入的诸概念有确切的理解．因此我们把引理 1.3.9 与 1.3.10 的证明留作习题.

同么正标架法相比，这一节介绍的只不过是一种较自然的推广，因此我们可以把这一节叫作*活动标架法*．但是定义 1.3.7、定义 1.3.8、引理 1.3.9 和引理 1.3.10 恰是现代术语中的主丛上的联络论.

§1.4 广义张量分析

分析学(即微积分学)是对 $\mathbf{R}^N$ 上的函数(或向量值函数)作微分与积分运算的学问．于是对微分流形上的"向量值函数"作"微积分运算的内容"自然就称为*流形上的分析学*了．在上述的说法中有两个问题首先需要澄清．第一个问题是：什么是流形上有价值的向量值函数？第二个问题是：如何定义导数(或微分)？第一个问题

极易处理．答案是：M 上向量丛的截面（整体截面）．关于第二个问题的产生与解决，请参阅文献[22]第4至6页，答案是向量丛上的联络．它是"导数"概念的推广．为此我们先来介绍向量丛及联络的概念．

定义1.4.1　一个向量丛 $(E, M, \tilde{\pi}: E\to M)$ 是由下列4个概念组成的：

(1) 拓扑空间 E，称为全空间；

(2) 拓扑空间 M，称为底空间；

(3) 连续映射 $\tilde{\pi}: E\to M$，称为投射；

(4) 对于任意的 $x\in M$，在 $\tilde{\pi}^{-1}(x)$ 中有确定的（实或复的）向量空间结构．

并且满足下列条件：对于任意 $x\in M$，存在 x 的一个邻域 U，和一个同胚 $\Phi: U\times V\to\tilde{\pi}^{-1}(U)$，其中 V 是一个固定的向量空间，使得

(i) $\tilde{\pi}\circ\Phi: U\times V\to U$ 是向第一因子空间的投射；

(ii) 对于任意 $u\in U$，由 Φ 确定的映射

$$\Phi(u, \cdot): V\to\tilde{\pi}^{-1}(u)$$

是线性空间同构．

我们把 $\tilde{\pi}^{-1}(u)$ 称为纤维，有时把上述向量丛简记为 $\tilde{\pi}: E\to M$ 或 E．

习题1.4.2　设 M 是微分流形．令 TM 是 M 上所有切向量的集合．$\tilde{\pi}: TM\to M$ 是将切向量映为它的起始点．试证：$\tilde{\pi}: TM\to M$ 是向量丛．

定义1.4.3　设 $\pi: E\to M$ 是向量丛．映射

$$W: M\to E$$

称为是一个截面，如果

$$\tilde{\pi}\circ W=id: M\to M.$$

其中 id 是恒同映射．我们记 C^∞ 截面的集合为 $\Gamma(E)$．

定义1.4.4　设 $\tilde{\pi}: E\to M$ 是一个实（或复的）向量丛．它的一个联络是一个下列映射：

$$D: \Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E): (X, W)\mapsto D_XW,$$

满足

（i）$D_X W$ 对变元 X 是 $\mathscr{F}(M)$ 线性的;

（ii）$D_X(W_1+W_2)=D_X W_1+D_X W_2$,

$$D_X(fW)=(Xf)W+fD_X W.$$

其中 W、W_1、$W_2\in\Gamma(E)$, $X\in\Gamma(TM)$, $f\in\mathscr{F}(M)$. 这里的 $\mathscr{F}(M)$ 是 M 上实(或复的)值 C^∞ 函数的集合.

到现在为止, 我们已经介绍过切丛上的联络(定义 1.1.1)、向量丛上的联络(定义 1.4.4)、主丛上的联络(定义 1.3.7). 其实这些联络的概念彼此相关, 它们间的密切关系表现在将要介绍的"配丛联络"这一概念中.

设 P 是一个 G 主丛, V 是一个集合, 又设有一个 G 在 V 上的左作用

$$\rho:\ G\times V\to V:\ (g,\ v)\mapsto\rho(g)v.$$

这里"左作用"意指: 对于任意的 g_1、$g_2\in G$, $v\in V$, 有

$$\rho(g_1\cdot g_2)v=\rho(g_1)(\rho(g_2)v).$$

现在定义 $P\times V$ 的一个商空间 $P\times_\rho V$ 如下: 先在 $P\times V$ 中引进一个等价关系"$\sim$". 对于 $(p,\ v)$、$(\bar{p},\ \bar{v})\in P\times V$, $(p,\ v)\sim(\bar{p},\ \bar{v})$ 表示: 存在 $g\in G$, 使得 $\bar{p}=pg$ 且 $\bar{v}=\rho(g^{-1})v$. 然后令 $P\times_\rho V$ 是 $P\times V$ 按等价关系$\sim$作成的商空间

$$P\times_\rho V=P\times V/\sim.$$

$(p,\ v)$ 所在的等价类记作 $\{(p,\ v)\}$ 或 $p\times_\rho v$ 或 $(p,\ v)$. 有时在不会引起混淆时, 将 $P\times_\rho V$ 记作 $P\times_G V$, 将 $p\times_\rho v$ 记作 $p\times_G v$, 也记作 $p\cdot v$. 此外还定义下列映射:

$$\tilde{\pi}:\ P\times_\rho V\to M:\ \{(p,\ v)\}\mapsto\pi(p).$$

其中 π 是主丛的投射 $\pi: P\to M$.

引理 1.4.5 设 P 是一个 G 主丛, V 是向量空间, 左作用 ρ 是线性的(或称 ρ 是 G 在 V 上的一个表示), 则 $\tilde{\pi}:\ P\times_\rho V\to M$ 是一个向量丛.

证明 首先对任意 $u\in M$, 我们在 $\tilde{\pi}^{-1}(u)$ 中引进向量空间结构. 若 $\{(p_1,\ v_1)\}$、$\{(p_2,\ v_2)\}\in\tilde{\pi}^{-1}(u)$, 选定一点 $p\in\tilde{\pi}^{-1}(u)$,

则有 g_1、$g_2\in G$, 使得

$$p_1=pg_1,\quad p_2=pg_2.$$

于是令

$$\{(p_1,\ v_1)\}+\{(p_2,\ v_2)\}=\{(p,\ \rho(g_1)v_1+\rho(g_2)v_2)\},$$
$$\lambda\{(p_1,\ v_1)\}=\{(p_1,\ \lambda v_1)\}.$$

其中 λ 是实数或复数, 视 V 是实或复向量空间而定. 容易验证上述在 $\tilde{\pi}^{-1}(u)$ 中定义的运算与 p 点的选取无关, 并且在上述运算下, $\tilde{\pi}^{-1}(u)$成为一个向量空间. 接着我们定义同胚 Φ 如下: 对于 $\sigma\in \mathrm{MF}(P)$, 当 σ 的定义域是 U 时, 令

$$\Phi:\ U\times V\to\tilde{\pi}^{-1}(U):\ (u,\ v)\mapsto\{(\sigma(u),\ v)\}.$$

从而易见引理的证明立即可得到. ▌

定义 1.4.6 设 P 是一个 G 主丛, ρ 是一个 G 的表示. 我们把向量丛 $P\times_\rho V$ 称为是主丛 P 的 ρ-配丛.

习题 1.4.7 设 M 是 n 维流形, 令 $P(M)$是 M 上所有标架的集合, 容易看出 $P(M)$是 $GL(n,\ \mathbf{R})$主丛. 令 $V=\mathbf{R}^n$, $GL(n,\ \mathbf{R})$ 在 V 上的两个表示 ρ_1、ρ_2 如下:

$$\rho_1:\ GL(n,\ \mathbf{R})\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n:\ \left(A,\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)\mapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

$$\rho_2:\ GL(n,\ \mathbf{R})\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n:\ \left(A,\ \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)\mapsto (A^{-1})^t\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

其中 $(A)^t$ 是矩阵 A 的转置. 试证: $P(M)\times_{\rho_1}\mathbf{R}^n$, $P(M)\times_{\rho_2}\mathbf{R}^n$ 分别是 M 的切丛 TM 和余切丛 T^*M.

定义 1.4.8 设 G 是一个李群, ρ_i: $G\to GL(V_i)\ (i=1,\ 2,\ 3)$ 是三个群表示. 一个双线性映射

$$m:\ V_1\times V_2\to V_3,$$

如果是 G 不变的, 即对任意的 $v_i\in V_i(i=1,\ 2,\ 3)$, $g\in G$,

$$\rho_3(g)m(v_1,\ v_2)=m(\rho_1(g)v_1,\ \rho_2(g)v_2),$$

则称为是一个 G 不变乘法.

易见一个 G 不变乘法 m 可以诱导出一个双 $\mathscr{F}(M)$ 线性映射

$$m_*: \Gamma(P\times_{\rho_1}V_1)\times\Gamma(P\times_{\rho_2}V_2)\to\Gamma(P\times_{\rho_3}V_3),$$

使得 $m_*(\{(\sigma, v_1)\}, \{(\sigma, v_2)\})=\{(\sigma, m(v_1, v_2))\}$.

定理 1.4.9(配联络的基本定理) 设 P 是一个 G 主丛，其上有一个联络 $\{\omega_\sigma\}$，则

(i) 对于任意 G 的表示 $\rho: G\to GL(V)$，向量丛 $P\times_\rho V$ 上有一个自然的联络，称为配联络(其定义见本定理的证明).

(ii) 设有三个 G 的表示 $\rho_i: G\to GL(V_i)$ $(i=1, 2, 3)$，和一个 G 不变乘法

$$m: V_1\times V_2\to V_3,$$

于是对 $W_1\in\Gamma(P\times_{\rho_1}V_1)$, $W_2\in\Gamma(P\times_{\rho_2}V_2)$, $X\in\Gamma(TM)$, 有

$$D_X m_*(W_1, W_2)=m_*(D_XW_1, W_2)+m_*(W_1, D_XW_2).$$

上式中的 D 皆是配联络.

证明 (i) 对于 $W\in\Gamma(P\times_\rho V)$，当任取 $\sigma\in\mathrm{MF}(P)$之后，如果 σ 的定义域是开集 U，则存在唯一的 $f: U\to V$，使得在 U 上，有

$$W|_U=\{(\sigma, f)\}.$$

此时由式 $\quad (D_XW)|_U=\{(\sigma, Xf+\omega_\sigma(X)f)\}$

可唯一确定出配联络 D(请读者自己验证这个定义的合理性). 其中 X 是 U 上的向量场，$\omega_\sigma(X)$是 U 到李代数 $\mathfrak{G}$ 的映射；由 $\rho: G\times V\to V$ 诱导出的 $\rho_*: \mathfrak{G}\times V\to V$ 给出 $\rho_*(\omega_\sigma(X), f)$ 恰是上面的 $\omega_\sigma(X)f$.

(ii) 对于 $\xi\in\mathfrak{G}$, $v_1\in V_1$, $v_2\in V_2$, 有 G 中的道路 $g(t)$ 使得 $g(0)=e$(单位元), $g'(0)=\xi$. 于是在 V_3 中有

$$\xi m(v_1, v_2)=g'(o)m(v_1, v_2)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g(t)m(v_1, v_2)$$

$$=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}m(g(t)v_1, g(t)v_2)$$

$$=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}m(g(t)v_1, g(o)v_2)$$

$$+\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} m(g(o)v_1,\ g(t)v_2)$$
$$=m(\xi v_1,\ v_2)+m(v_1,\ \xi v_2).$$

从而当 W_1、W_2 在 U 上分别表为 $\{(\sigma,\ f_1)\}$，$\{(\sigma,\ f_2)\}$ 时，我们有

$$\begin{aligned}
&D_X m_*(\{(\sigma,\ f_1)\},\ \{(\sigma,\ f_2)\})\\
&=D_X(\{(\sigma,\ m(f_1,\ f_2))\})\\
&=\{(\sigma,\ Xm(f_1,\ f_2)+\omega_\sigma(X)m(f_1,\ f_2))\}\\
&=\{(\sigma,\ m(Xf_1,\ f_2)+m(f_1,\ Xf_2)+m(\omega_\sigma(X)f_1,\ f_2)\\
&\quad +m(f_1,\ \omega_\sigma(X)f_2))\}\\
&=\{(\sigma,\ m(Xf_1+\omega_\sigma(X)f_1,\ f_2)\}\\
&\quad +\{(\sigma,\ m(f_1,\ Xf_2+\omega_\sigma(X)f_2)\}\\
&=m_*(D_X\{(\sigma,\ f_1)\},\ \{(\sigma,\ f_2)\})\\
&\quad +m_*(\{(\sigma,\ f_1)\},\ D_X\{(\sigma,\ f_2)\})\\
&=m_*(D_XW_1,\ W_2)+m_*(W_1,\ D_XW_2).
\end{aligned}$$

定理证毕. ▌

注 1.4.10 定理 1.4.9(ii) 可以用来确定配联络，在经典张量分析中的情形恰是如此. 设 M 是 n 维微分流形. 令 $P(M)$ 是 M 上切标架构成的 $GL(n,\ \mathbf{R})$主丛. 设 ρ_1、ρ_2 是习题 1.4.7 中的两个 $GL(n,\ \mathbf{R})$的表示. 我们已知 $P(M)\times_{\rho_1}\mathbf{R}^n=TM$，$P(M)\times_{\rho_2}\mathbf{R}^n=T^*M$. 令 $\rho\equiv(\rho_1)^{\otimes m_1}\otimes(\rho_2)^{\otimes m_2}$ 是 $GL(n,\ \mathbf{R})$的表示的张量积，确切地说

$$\rho\equiv(\rho_1)^{\otimes m_1}\otimes(\rho_2)^{\otimes m_2}=\underbrace{\rho_1\otimes\cdots\otimes\rho_1}_{m_1\text{个}}\otimes\underbrace{\rho_2\otimes\cdots\otimes\rho_2}_{m_2\text{个}}.$$

由下面的习题 1.4.11 知，向量丛

$$P(M)\times_\rho((\mathbf{R}^n)^{\otimes m_1}\otimes(\mathbf{R}^n)^{\otimes m_2})$$

恰是$(m_1,\ m_2)$型张量丛

$$T^{m_1}_{m_2}\equiv TM\otimes\cdots\otimes TM\otimes T^*M\otimes\cdots\otimes T^*M.$$

它的截面就是流形 M 上的张量场. 张量积运算

$$\Gamma(T^{m_1}_{m_2})\times\Gamma(T^{m_1'}_{m_2'})\to\Gamma(T^{m_1+m_1'}_{m_2+m_2'})$$

和缩并运算

$$\Gamma(T^{m_1+1}_{m_2+1}) = \Gamma(T^{m_1+1}_{m_2+1}) \otimes \Gamma(T^0_0) \to \Gamma(T^{m_1}_{m_2})$$

皆可由 $GL(n, \mathbf{R})$ 不变的乘法所诱导，利用这两种运算和定理 1.4.9(ii)，我们可以确定张量从 $T^{m_1}_{m_2}$ 上的配联络.

前面我们说过流形上的分析是流形上的向量丛(的截面)的分析学，经典的张量分析是一组向量丛(张量丛)上的分析学，各张量丛分析学之间的关系由定理 1.4.9 联系起来. 由此可设想：M 上某个 G 主丛的一切配丛上的分析学应称为广义张量分析.

在习题 1.4.11 之前，我们先引进几个概念：设 $\pi: E\to M$ 是一个向量丛. 对 $x\in M$, $\pi^{-1}(x)$ 是一个向量空间，记它的对偶空间(由一切线性函数组成的空间)为 $(\pi^{-1}(x))^*$，令

$$E^* = \bigcup_{x\in M} (\pi^{-1}(x))^*,$$

在验证 E^* 是向量丛之后，我们称它为 E 的对偶丛. 若 $\pi_1: E_1\to M$, $\pi_2: E_2\to M$ 是两个向量丛，则令

$$E_1\otimes E_2 = \bigcup_{x\in M} ((\pi_1^{-1}(x))\otimes(\pi_2^{-1}(x))).$$

在验证 $E_1\otimes E_2$ 是向量丛之后，我们称它为 E_1 与 E_2 的张量积. 对于一个群 G 的表示

$$\rho: G\times V\to V,$$

我们定义它的对偶表示

$$\rho^*: G\times V^*\to V^*$$

如下：对于任意的 $v\in V$, $\varphi\in V^*$, $g\in G$,

$$(\rho^*(g, \varphi))(v) = \varphi(\rho(g^{-1}v)).$$

对于两个表示 ρ_1、ρ_2，我们已知有它们的张量积 $\rho_1\otimes\rho_2$.

习题 1.4.11 设 P 是一个 G 主丛，$\rho_i: G\times V_i\to V_i (i=0, 1, 2)$，是 G 的表示，则

(i) $(P\times_{\rho_0} V_0)^* = P\times_{\rho_0^*} V_0^*$;

(ii) $(P\times_{\rho_1} V_1)\otimes(P\times_{\rho_2} V_2) = P\times_{\rho_1\otimes\rho_2}(V_1\otimes V_2)$.

习题 1.4.12 设 M 是 n 维微分流形，如果存在一个以 M 为底空间的 $O(n)$ 主丛 P，使得

$$P\times_{O(n)}\mathbf{R}^n \cong TM,$$

其中$O(n)$在$\mathbf{R}^n$上的右作用定义如下：

$$O(n)\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n:\left(A,\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\right)\mapsto A\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}.$$

这时称M有一个$O(n)$结构. 试证：若M有一个$O(n)$结构P，则在M上存在一个黎曼度量，使得幺正标架主丛$O(M)$同构于P.

习题 1.4.13 设M是一个n维黎曼流形，$O(M)$是幺正标架构成的$O(n)$主丛. 如果

$$\{\omega_\sigma \mid \sigma\in MF(O(M))\}$$

是$O(M)$的一个联络. 则它导出向量丛

$$TM=P\times_{O(n)}\mathbf{R}^n$$

上的配联络D满足

$$X\langle Y,\ Z\rangle=\langle D_XY,\ Z\rangle+\langle Y,\ D_XZ\rangle. \tag{1.4.1}$$

其中X、Y、$Z\in\Gamma(TM)$. 反之，若TM上有一个满足(1.4.1)的联络，则它必是$O(M)$的某个主丛联络的配联络.

§1.5 微分算子与椭圆算子

设M是实n维流形，E与F是M上两个向量丛(实的或复的). 令$\Gamma(E)$、$\Gamma(F)$分别是E、F的C^∞截面集合，又令

$$\{\xi_1,\ \cdots,\ \xi_{N_1}\}、\{\eta_1,\ \cdots,\ \eta_{N_2}\}$$

分别是E、F的局部截面基. 这里所谓的局部截面基$\{\xi_1,\cdots,\xi_{N_1}\}$是指：$\xi_i$是$E$的局部截面($i=1,\ \cdots,\ N_1$)，它们定义在$M$的一个开集$U$上，并且对任意的$x\in U$，$\{\xi_1(x),\ \cdots,\ \xi_{N_1}(x)\}$是纤维$\pi_E^{-1}(x)$的基，其中$\pi_E$: $E\to M$是向量丛的投射.

定义 1.5.1 映射L: $\Gamma(E)\to\Gamma(F)$称为是一个m阶线性微分算子，如果对M的任意充分小的邻域U，在其上任意选取坐标系$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$和E、F的局部截面基$(\xi_1,\ \cdots,\ \xi_{N_1})$、$(\eta_1,\ \cdots,\ \eta_{N_2})$，$L$可以限制在$U$上，记为

$$L^U:\Gamma(E|_U)\to\Gamma(F|_U).$$

并且它表示为下列关系式:

$$L^U\Big(\sum_{\alpha=1}^{N_1} f_\alpha \xi_\alpha\Big)=\sum_{\beta=1}^{N_2} g_\beta \eta_\beta,$$

$$g_\beta(x)=\sum_{\substack{\alpha=1,\cdots,N_1\\ |i|\le m}} a^\alpha_{\beta i_1\cdots i_n}(x)\ \frac{\partial^{|i|}}{\partial x_1^{i_1}\cdots\partial x_n^{i_n}} f_\alpha(x),$$

其中 $E|_U=\pi_E^{-1}(U)$, 它是 U 上的向量丛; f_α、g_β、$a^\alpha_{\beta i_1\cdots i_n}$ 是 U 上的 C^∞ 函数; $|i|=i_1+\cdots+i_n$; $i_1, \cdots, i_n$ 以及 m 为非负整数.

下面我们先作一些准备, 希望将上述的微分算子 L 写成一种标准的形式.

定义 1.5.2 设 E 是 M 上的向量丛, M 是 n 维黎曼流形, D 是 E 上的联络, ∇ 是 M 的 Levi-Civita 联络. 对于 X、$Y\in \Gamma(TM)$, 令

$$D(X, Y)=D_XD_Y-D_{\nabla_XY}:\Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

并称之为二次协变导数. 容易证明 $D(X, Y)$关于变元 X、Y 是 $\mathscr{F}(M)$线性的. 若 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是 M 的局部幺正基, 令

$$\Delta_0=\sum_{i=1}^{n} D(E_i, E_i): \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

并称之为 Laplace-Beltrami 算子.

仿照定义 1.1.4, 我们有

定义 1.5.3 联络 D 的曲率定义为

$$R(X, Y)=D_XD_Y-D_YD_X-D_{[X,Y]}: \Gamma(E)\to\Gamma(E).$$

于是可见 $\quad R(X, Y)=D(X, Y)-D(Y, X).$

定义 1.5.4 假设同定义 1.5.2, 我们以归纳方式定义 $m+1$ 次协变导数 $D(X_1, \cdots, X_{m+1})$ 如下: 对于 $X_1, \cdots, X_{m+1}\in \Gamma(TM)$, 令

$$\begin{aligned}D(X_1, \cdots, X_{m+1})=&D_{X_1}D(X_2, \cdots, X_{m+1})\\&-D(\nabla_{X_1}X_2, X_3, \cdots, X_{m+1})\\&-\cdots-D(X_2, \cdots, X_m, \nabla_{X_1}X_{m+1}).\end{aligned}$$

习题 1.5.5 试证: $D(X_1, \cdots, X_{m+1})$关于变元 $X_1, \cdots, X_{m+1}$ 皆是 $\mathscr{F}(M)$线性的.

设 E 与 F 是 M 上的向量丛. 对于 $x\in M$, 令

$$(E\otimes F)_x=\pi_E^{-1}(x)\otimes\pi_F^{-1}(x),$$

则有一个自然的向量丛, 它以$(E\otimes F)_x$为纤维. 我们把这个向量丛记为 $E\otimes F$, 称它为向量丛 E 与 F 的张量积. (在此请读者验证 $E\otimes F$ 的存在性, 我们不多讲了.) 又令

$$(\mathrm{Hom}(E,\ F))_x=\mathrm{Hom}(\pi_E^{-1}(x),\ \pi_F^{-1}(x))$$
$$=\{\varphi: \pi_E^{-1}(x)\to\pi_F^{-1}(x)\,|\,\varphi\text{ 是线性的}\},$$

则又可知有一个向量丛 $\mathrm{Hom}(E,\ F)$以$(\mathrm{Hom}(E,\ F))_x$为纤维. 类似地, 令

$$(ST^m)_x=\left\{\sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{n} t_{i_1\cdots i_m}\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x_{i_m}}\in(T_x)^{\otimes m}\,\middle|\,t_{i_1\cdots i_m}\right.$$
$$\left.\text{是实数, 并且关于指数 } i_1,\ \cdots,\ i_m\text{ 是对称的}\right\},$$

其中 $T_x=T_xM=M_x$, $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1},\ \cdots,\ \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$是对应于 M 的局部坐标系$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$的自然标架场. 于是又有一个自然的向量丛 ST^m 以$(ST^m)_x$为它的纤维.

假设同前, 又设

$$a\in\Gamma(\mathrm{Hom}(E,\ F)\otimes ST^m).$$

若 $\{E_1,\ \cdots,\ E_n\}$ 是 M 的局部标架场(定义域为 U), 则在 U 上 a 唯一表为

$$a=\sum_{i_1,\cdots,i_m}a_{i_1\cdots i_m}E_{i_1}\otimes\cdots\otimes E_{i_m},$$

其中 $a_{i_1\cdots i_m}$ 关于指标 $i_1,\ \cdots,\ i_m$ 是对称的, 并且对任意 $x\in U$, $a_{i_1\cdots i_m}(x)\in\mathrm{Hom}(E_x,\ F_x)$, 这里 $E_x=\pi_E^{-1}(x)$, $F_x=\pi_F^{-1}(x)$, 这时令

$$L_a^U=\sum_{i_1,\cdots,i_m}a_{i_1\cdots i_m}D(E_{i_1},\ \cdots,\ E_{i_m}):\Gamma(E|_U)\to\Gamma(E|_U).$$

引理 1.5.6 上述定义的 L_a^U 有下列性质:

(i) L_a^U 与 U 上的标架场 $\{E_1,\ \cdots,\ E_n\}$ 的选取无关. 从而有唯一的

$$L_a:\Gamma(E)\to\Gamma(F)$$

使得 $$(L_a)^U = L_a^U.$$

(ii) L_a: $\Gamma(E)\to\Gamma(F)$是m阶线性微分算子.

证明不难(略).

定义 1.5.7 假设同前,称引理1.5.6中的L_a为对应于a的微分算子.

习题 1.5.8 设 X、$Y\in\Gamma(TM)$,试证

$$D_X: \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$
$$D(X, Y): \Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

是微分算子. 又由下式

$$(D_1W)(X) = D_XW, \ \forall x\in\Gamma(TM),$$
$$(D_2W)(X, Y) = D(X, Y)W, \ \forall X、Y\in\Gamma(TM)$$

定义的映射

$$D_1: \Gamma(E)\to\Gamma(E\otimes T^*M),$$
$$D_2: \Gamma(E)\to\Gamma(E\otimes T^*M\otimes T^*M)$$

也是微分算子, 其中 $W\in\Gamma(E)$. 最后试将 D_X、$D(X, Y)$、D_1、D_2 表为引理1.5.6中的 L_a.

引理 1.5.9 假设同定义1.5.2. 若

$$L: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$$

是一个m阶线性微分算子,则存在唯一的

$$a\in\Gamma(\mathrm{Hom}(E, F)\otimes ST^m),$$

使得

$$L-L_a: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$$

是k阶微分算子, 其中$k\leqslant m-1$.

引理1.5.9的证明不难,故请读者自证.

由引理1.5.9立即可推得以下定理:

定理 1.5.10 设M是n维黎曼流形, ∇是Levi-Civita联络. 又设E与F是M上的向量丛, 并且在E上有联络D. 对任意的$a_i\in\Gamma(\mathrm{Hom}(E, F)\otimes ST^{m_i})$ $(i=1, \cdots, r)$, 按定义1.5.7有L_{a_i}, 则

$$L\equiv L_{a_1}+\cdots+L_{a_r}: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$$

是m阶线性微分算子，其中$m=\mathrm{Max}(m_1, \cdots, m_r)$. 反之，任何一个线性微分算子

$$L:\ \Gamma(E)\to\Gamma(F)$$

必可唯一地表为

$$L=L_{a_1}+\cdots+L_{a_r},$$

其中$\{a_1, \cdots, a_r\}$为L唯一确定，使得$m_1>m_2>\cdots>m_r$.

定义 1.5.11 假设同前. 若L: $\Gamma(E)\to\Gamma(F)$是m阶线性微分算子，则我们把定理1.5.10确定的L_{a_1}或a_1叫作L的*主项*.

注 1.5.12 容易看出，L的主项L_{a_1}与M、E上的联络选取有关，但是a_1却与选择无关.

设$x\in M$，若$\xi\in T^*_x=T^*_xM$，那么ξ就是T_xM上的线性函数. 当

$$a(x)=\sum_{i_1,\cdots,i_m}a_{i_1\cdots i_m}(x)E_{i_1}(x)\otimes\cdots\otimes E_{i_m}(x)$$
$$\in\mathrm{Hom}(E_x,\ F_x)\otimes ST^m_x$$

时，对于任意的$\xi\in T^*_x$，令

$$[a](\xi)=\sum_{i_1,\cdots,i_m}a_{i_1\cdots i_m}(x)\xi(E_{i_1}(x))\cdots\xi(E_{i_m}(x)),$$

于是便有丛映射

$$[a]:\ T^*M\to\mathrm{Hom}(E,\ F).$$

定义 1.5.13 设L: $\Gamma(E)\to\Gamma(F)$是m阶线性微分算子，a是它的主项，则称上面定义的

$$[a]:\ T^*M\to\mathrm{Hom}(E,\ F)$$

为L的*主象征*.

定义 1.5.14 设L: $\Gamma(E)\to\Gamma(F)$是m阶线性微分算子，$[a]$是它的主象征. 如果对于任意的$\xi\in T^*_xM-\{0\}$，$[a](\xi)$是$\mathrm{Hom}(E_x,\ F_x)$中的可逆元素，则称L为*椭圆算子*.

§ 1.6 de Rham-Hodge 算子和 Signature 算子

这一节我们介绍两个重要的一阶微分算子. 它们是 de Rham-

Hodge 算子和 Signature 算子.

设 M 是 n 维微分流形. 令 $\Lambda^k(M)$ 是 M 上所有 k 次微分式的集合,

$$d: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M)$$

是外微分算子. 于是有

$$\cdots\to\Lambda^{k-1}(M)\xrightarrow{d}\Lambda^k(M)\xrightarrow{d}\Lambda^{k+1}(M)\to\cdots.$$

由于 $d^2=0$, 故上述序列是一个复合形, 通常称为 de Rham 复形.

假设在 M 上给定一个黎曼度量(M 就是一个黎曼流形). 这在向量场的集合 $\Gamma(TM)$ 上给定一个取值在 $\mathscr{F}(M)$ 中的"内积", 其中 $\mathscr{F}(M)$ 是 M 上的所有 C^∞ 实函数构成的集合. 换句话说, 有

$$g: \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\mathscr{F}(M): (X, Y)\mapsto\langle X, Y\rangle.$$

或者也可说对 M 上任一点 x, 在向量空间 T_xM 上给定一个实内积

$$g_x: T_xM\times T_xM\to\mathbb{R}: (X_x, Y_x)\mapsto\langle X_x, Y_x\rangle.$$

利用上述黎曼度量, 则很容易导出一个定义在 $\Lambda^k(M)$ 上取值在 $\mathscr{F}(M)$ 中的内积

$$\langle , \rangle: \Lambda^k(M)\times\Lambda^k(M)\to\mathscr{F}(M),$$

使得它是双 $\mathscr{F}(M)$ 线性的, 并且对于 α_i、$\beta_i\in\Lambda^1(M)$ 时,

$$\langle\alpha_1\wedge\cdots\wedge\alpha_k, \beta_1\wedge\cdots\wedge\beta_k\rangle=\det\begin{pmatrix}\langle\alpha_1, \beta_1\rangle & \cdots & \langle\alpha_1, \beta_k\rangle\\ \vdots & & \vdots\\ \langle\alpha_k, \beta_1\rangle & \cdots & \langle\alpha_k, \beta_k\rangle\end{pmatrix}.$$

至于 $\langle\alpha_i, \beta_i\rangle$, 乃以如下方式定义: 在 M 上取局部坐标 $(x_1, \cdots, x_n)$, 令

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle,$$

又令矩阵

$$\begin{pmatrix}g_{11} & \cdots & g_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ g_{n1} & \cdots & g_{nn}\end{pmatrix}$$

的逆矩阵是

$$\begin{pmatrix}g^{11} & \cdots & g^{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ g^{n1} & \cdots & g^{nn}\end{pmatrix},$$

则 $$\langle\alpha_i,\ \beta_s\rangle=\sum_{j,k}\alpha_i\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)\cdot\beta_s\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)\cdot g^{jk}.\ ]$$

当然，在上述定义

$$\langle\ ,\ \rangle:\ \Lambda^k(M)\times\Lambda^k(M)\to\mathscr{F}(M)$$

的过程中，存在着选取 α_i、β_i、$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$的随意性．为此，请读者验证上述定义与这些随意性是无关的．容易验证上面定义的 $\Lambda^k(M)$中的内积和黎曼度量 g 一样具有逐点对称及正定性质．

黎曼度量能给出 M 上一个测度 dv，其详情请参阅文献[22]的第194页．利用这个测度，我们在无穷维实向量空间 $\Lambda^k(M)$ 上定义一个实值内积

$$\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle:\ \Lambda^k(M)\times\Lambda^k(M)\to\mathbf{R}:\ (\alpha,\ \beta)\mapsto\int_M\langle\alpha,\ \beta\rangle\,dv,$$

其中 α、$\beta\in\Lambda^k(M)$．容易由$\langle\ ,\ \rangle$的性质导出：

（i）$\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle=\langle\langle\beta,\ \alpha\rangle\rangle$，并且 $\langle\langle\alpha,\ \beta\rangle\rangle$ 关于变元 α、β 是实双线性的．

（ii）$\langle\langle\alpha,\ \alpha\rangle\rangle\geqslant0$，并且等号成立的充要条件是 $\alpha=0$．

利用内积 $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$，我们来定义伴随算子的概念：设 L_1 与 L_2 是实线性算子

$$L_1:\ \Lambda^k(M)\to\Lambda^s(M),$$
$$L_2:\ \Lambda^s(M)\to\Lambda^k(M).$$

如果对于任意的 $\alpha\in\Lambda^k(M)$，$\beta\in\Lambda^s(M)$，有下列等式成立：

$$\langle\langle L_1\alpha,\ \beta\rangle\rangle=\langle\langle\alpha,\ L_2\beta\rangle\rangle,$$

则称 L_1 与 L_2 互为伴随算子．如果又有 L_3，使 L_1 与 L_3 也互为伴随算子，那么便有

$$\begin{aligned}0&=\langle\langle L_1\alpha,\ \beta\rangle\rangle-\langle\langle L_1\alpha,\ \beta\rangle\rangle\\&=\langle\langle\alpha,\ L_2\beta\rangle\rangle-\langle\langle\alpha,\ L_3\beta\rangle\rangle=\langle\langle\alpha,\ (L_2-L_3)\beta\rangle\rangle.\end{aligned}$$

在上式中取 $\alpha=(L_2-L_3)\beta$，由 $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ 具有的性质(ii)可知

$$(L_2-L_3)\beta=0.$$

于是有 $$L_2=L_3.$$

这说明当 L_1 与 L_2 互为伴随算子时，L_2 为 L_1 唯一确定．从而我

们称 L_2 为 L_1 的伴随算子，并记 L_2 为 $(L_1)^*$ 或 L_1^*. 当然也可知 $L_1=L_2^*$, 并且 $(L_1^*)^*=L_1$. 可是现在我们还未说明一个线性算子 L 是否有伴随算子 L^* 呢？容易证明线性微分算子必具有伴随算子. 但是这一结论不会给本书的讨论带来好处, 所以我们就不证了. 下面讨论一个具体的问题, 那就是: 算子

$$d: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M)$$

的伴随算子是什么？我们采用 Hodge 的办法, 借助一个 Hodge$*$ 同态(在 M 是定向流形时)

$$*: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{n-k}(M)$$

来引进 d^*.

假设 M 是定向黎曼流形. 任取 M 上的(局部)幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$, 使得它的定向与 M 的定向一致. 令 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的对偶标架场是 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$, 即 ω_i 是(局部的)一次微分式, 满足

$$\omega_i(E_j)=\delta_{ij}, \quad \forall i, j=1, \cdots, n.$$

此时对任意的 $\omega\in\Lambda^k(M)$, 当

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_k} f_{i_1\cdots i_k}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}$$

时, 令

$$*\omega=\sum_{\substack{i_1<\cdots<i_k\\ j_1<\cdots<j_{n-k}}} f_{i_1\cdots i_k}\varepsilon(i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_{n-k}) \times\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{n-k}},$$

式中

$$\varepsilon(i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_{n-k}) =\begin{cases} 1, & \text{当}(i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_{n-k})\text{是}(1, \cdots, n)\text{的偶排列;}\\ -1, & \text{当}(i_1, \cdots, i_k, j_1, \cdots, j_{n-k})\text{是}(1, \cdots, n)\text{的奇排列;}\\ 0, & \text{其余情形.}\end{cases}$$

不难验证, 用上述方法可定义 Hodge$*$ 同态:

$$*: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{n-k}(M).$$

事实上, 若另外取局部幺正标架场 $\{\overline{E}_1, \cdots, \overline{E}_n\}$ 使得它的定向与 M 的一致, 则在 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 与 $\{\overline{E}_1, \cdots, \overline{E}_n\}$ 的公共定义域 U

上有取值在$SO(n)$上的函数

$$A=(A_{ij}):\ U\to SO(n),$$

使得
$$(\overline{E}_1,\ \cdots,\ \overline{E}_n)=(E_1,\ \cdots,\ E_n)\cdot A,$$

其中$SO(n)$是n阶旋转群. 这时有

$$(\overline{\omega}_1,\ \cdots,\ \overline{\omega}_n)=(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_n)\cdot A.$$

现在我们把上面只对$i_1<\cdots<i_k$有定义的$f_{i_1,\cdots,i_k}$扩充为对所有指标$(i_1,\ \cdots,\ i_k)$皆有定义，使得$f_{i_1,\cdots,i_k}$关于指标$i_1,\ \cdots,\ i_k$是反称的. 那么由于

$$\begin{aligned}\omega&=\sum_{i_1<\cdots<i_k}\overline{f}_{i_1,\cdots,i_k}\overline{\omega}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\overline{\omega}_{i_k}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{i_1,\cdots,i_k}\overline{f}_{i_1,\cdots,i_k}\overline{\omega}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\overline{\omega}_{i_k}\\&=\frac{1}{k!}\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_k}}\overline{f}_{i_1,\cdots,i_k}A_{j_1i_1}\cdots A_{j_ki_k}\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_k},\end{aligned}$$

故
$$f_{j_1,\cdots,j_k}=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\overline{f}_{i_1,\cdots,i_k}A_{j_1i_1}\cdots A_{j_ki_k}.$$

在$\{\overline{E}_1,\ \cdots,\ \overline{E}_n\}$和$\{E_1,\ \cdots,\ E_n\}$下定义$*\omega$的表达式分别是:

$$*\omega=\frac{1}{k!(n-k)!}\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_{n-k}}}\overline{f}_{i_1,\cdots,i_k}\varepsilon(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})\overline{\omega}_{j_1}\wedge\cdots\wedge\overline{\omega}_{j_{n-k}}$$

$$\begin{aligned}*\omega&=\frac{1}{k!(n-k)!}\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_{n-k}}}f_{i_1\cdots i_k}\varepsilon(i_1,\cdots,i_k,j_1,\cdots,j_{n-k})\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{n-k}}\\&=\frac{1}{k!(n-k)!}\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_{n-k}}}\sum_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_k\\\beta_1,\cdots,\beta_{n-k}}}\overline{f}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_k}A_{i_1\alpha_1}\cdots A_{i_k\alpha_k}\\&\quad\times\varepsilon(i_1,\ \cdots,\ i_k,\ j_1,\ \cdots,\ j_{n-k})A_{j_1\beta_1}\cdots A_{j_{n-k}\beta_{n-k}}\overline{\omega}_{\beta_1}\wedge\cdots\wedge\overline{\omega}_{\beta_{n-k}}.\end{aligned}$$

因此为了证明$*\omega$的定义的合理性，就需验证上述两个$*\omega$的表达式相等. 由于

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k\\j_1,\cdots,j_{n-k}}}\varepsilon(i_1,\ \cdots,\ i_k,\ j_1,\ \cdots,\ j_{n-k})A_{i_1\alpha_1}\cdots A_{i_k\alpha_k}A_{j_1\beta_1}\cdots A_{j_{n-k}\beta_{n-k}}\\&=\begin{vmatrix}A_{1\alpha_1}&\cdots&A_{1\alpha_k}&A_{1\beta_1}&\cdots&A_{1\beta_{n-k}}\\\vdots&&\vdots&\vdots&&\vdots\\A_{n\alpha_1}&\cdots&A_{n\alpha_k}&A_{n\beta_1}&\cdots&A_{n\beta_{n-k}}\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$=\varepsilon(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n-k})\cdot\begin{vmatrix}A_{11} & \cdots & A_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ A_{n1} & \cdots & A_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\varepsilon(\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_k,\ \beta_1,\ \cdots,\ \beta_{n-k}),$$

故欲证的两个 $*\omega$ 的表达式相等.

引理 1.6.1 设 M 是 n 维定向黎曼流形, 则 Hodge$*$ 同态具有下列性质:

(i) $*(\alpha+\beta)=*\alpha+*\beta,\ \forall\alpha,\ \beta\in\Lambda^k(M)$,

$*(f\alpha)=f(*\alpha),\ \forall\alpha\in\Lambda^k(M),\ f\in\Lambda^0(M)=\mathscr{F}(M)$.

(ii) $**=(-1)^{nk+k}$: $\Lambda^k(M)\to\Lambda^k(M)$.

(iii) 对于 α、$\beta\in\Lambda^k(M)$, 有

$$\alpha\wedge*\beta=\langle\alpha,\ \beta\rangle*1,$$

其中 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$ 是 $\Lambda^k(M)$ 中元素 α 与 β 的内积.

(iv) 对于 M 上的任意向量场 X, 有

$$\nabla_X*=*\nabla_X,$$

其中 ∇ 是 Levi-Civita 联络.

引理 1.6.1 的证明是容易的, 故略.

定义 1.6.2 设 M 是 n 维定向黎曼流形. 令

$$\delta=(-1)^{nk+n+1}*d*:\ \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k-1}(M).$$

注意, 当 M 的定向改变时, $*$ 会改变号. 可是 δ 却不改变. 因此, 当 M 是不可定向的黎曼流形时, 无法定义 $*$, 但经稍加讨论仍可定义

$$\delta:\ \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k-1}(M).$$

从 $*$ 的性质可直接导出以下引理:

引理 1.6.3 设 M 是 n 维定向黎曼流形, 则

(i) $\delta(\alpha+\beta)=\delta\alpha+\delta\beta;\ \forall\alpha$、$\beta\in\Lambda^k(M)$;

(ii) $\delta\delta=0$;

(iii) $*\delta=(-1)^k d*$: $\Lambda^k(M)\to\Lambda^{n-k+1}(M)$,

$\delta*=(-1)^{k+1}*d$: $\Lambda^k(M)\to\Lambda^{n-k-1}(M)$;

(iv) 对于 $\alpha\in\Lambda^k(M),\ \beta\in\Lambda^{k+1}(M)$, 有

$$\langle d\alpha,\ \beta\rangle*1-\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle*1=d(\alpha\wedge*\beta).$$

证明 (i)、(ii)、(iii)是显然的，故不证．现在证(iv)．根据引理1.6.1(iii)和本引理(iii)，有

$$\begin{aligned}\langle d\alpha,\ \beta\rangle*1-\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle*1&=d\alpha\wedge*\beta-\alpha\wedge*\delta\beta\\&=d(\alpha\wedge*\beta)-(-1)^k\alpha\wedge d*\beta-\alpha\wedge*\delta\beta\\&=d(\alpha\wedge*\beta).\end{aligned}$$

故(iv)得证．▮

命题1.6.4 设 M 是 n 维黎曼流形，则

(i) 算子 d: $\Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M)$ 有伴随算子，并且伴随算子是 δ: $\Lambda^{k+1}(M)\to\Lambda^k(M)$．

(ii) $d+\delta$: $\Lambda^*(M)\to\Lambda^*(M)$ 是椭圆算子，其中

$$\Lambda^*(M)=\bigoplus_k\Lambda^k(M).$$

证明 当 M 是定向黎曼流形时，由引理1.6.3知

$$\begin{aligned}\langle\langle d\alpha,\ \beta\rangle\rangle-\langle\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle\rangle&=\int_M\langle d\alpha,\ \beta\rangle dv-\int_M\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle dv\\&=\int_{\vec{M}}\langle d\alpha,\ \beta\rangle*1-\int_{\vec{M}}\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle*1\\&=\int_{\vec{M}}d(\alpha\wedge*\beta)=0.\end{aligned}$$

上式中的记号 $\vec{M}$ 表示带有定向的流形 M．于是可知 δ 是 d 的伴随算子；当 M 是不可定向流形时，上述推理失效，故需补充证明．有两个补充的办法：第一个办法是作 M 的二层标准复迭空间 $\hat{M}$，这个 $\hat{M}$ 是可定向流形．于是前面的论证对 $\hat{M}$ 可以通过，即在 $\hat{M}$ 上有

$$\langle\langle d\alpha',\ \beta'\rangle\rangle_{\hat{M}}+\langle\langle\alpha',\ \delta\beta'\rangle\rangle_{\hat{M}}=0,\ \forall\alpha'、\beta'\in\Lambda^*(\hat{M}).$$

容易看出
$$\langle\langle d\alpha,\ \beta\rangle\rangle_M=\frac{1}{2}\langle\langle d\hat{\alpha},\ \hat{\beta}\rangle\rangle_{\hat{M}},$$

$$\langle\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle\rangle_M=\frac{1}{2}\langle\langle\hat{\alpha},\ \delta\hat{\beta}\rangle\rangle_{\hat{M}}.$$

其中 $\hat{\alpha}$、$\hat{\beta}$ 是 M 上的微分式 α、β 拉到 $\hat{M}$ 的．这样便证明了(i)．第二个办法是将 $\langle d\alpha,\beta\rangle-\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle$ 写成 M 上某个向量场的散度，

再利用文献[22]第 199 页习题 2, 便得到(i)的证明. 详情请读者自己补出. 关键之处在于求出 $X\in\Gamma(TM)$, 使得

$$i(X)*1=\alpha\wedge*\beta,$$

从而

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(X)*1&=d(i(X)*1)=d(\alpha\wedge*\beta)\\&=(\langle d\alpha,\beta\rangle-\langle\alpha,\delta\beta\rangle)*1,\end{aligned}$$

问题就解决了. 关于(ii), 虽然证明是容易的, 但是要把证明写下来却十分繁琐, 需做的工作是: (1) 把 $\Lambda^*(M)$写成某一个向量丛 E 的截面集合 $\Gamma(E)$; (2) 在局部上用导算子把 $d+\delta$ 表示出来, 或者用定理 1.5.10 中的 $L_{a_1}+\cdots+L_{a_r}$ 把 $d+\delta$ 表示出来; (3) 按照定义 1.5.14 验证$[a_1]$的"可逆性". 为此我们先介绍一些有关的概念, 而把(ii)的证明放在引理 1.6.8 之后.

设 M 是 n 维黎曼流形, 令 $O(M)$是 M 上所有幺正标架的集合. 由习题 1.3.4 知 $O(M)$是 $O(n)$主丛. 令

$$\mathbf{R}^n=\left\{\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\middle|\,x_i\in\mathbf{R},\ \forall i=1,\ \cdots,\ n\right\}.$$

又令
$$O(n)\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n:\ \left(A,\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}\right)\mapsto A\cdot\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

是习题 1.4.12 中的 $O(n)$在 $\mathbf{R}^n$ 上的左作用. 定义 $\Lambda^k_{\mathbf{R}}(n)$和$\Lambda^k_{\mathbf{C}}(n)$分别为由集合

$$\{\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}\,|\,1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$$

张成的实和复的向量空间, 并定义 $O(n)$在 $\Lambda^k_{\mathbf{R}}(n)$、$\Lambda^k_{\mathbf{C}}(n)$上的左作用, 使之适合下列条件:

$$\begin{aligned}A(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k})=&\sum_{j_1<\cdots<j_k}\sum_{l_1,\cdots,l_k}\varepsilon\begin{pmatrix}l_1&\cdots&l_k\\j_1&\cdots&j_k\end{pmatrix}\\&\times A_{l_1i_1}\cdots A_{l_ki_k}\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k},\end{aligned}$$

其中

$$\varepsilon\begin{pmatrix} l_1 & \cdots & l_k \\ j_1 & \cdots & j_k \end{pmatrix} = \begin{cases} 1, & 当(l_1\cdots l_k)是(j_1\cdots j_k)的偶排列; \\ -1, & 当(l_1\cdots l_k)是(j_1\cdots j_k)的奇排列; \\ 0, & 其余情形. \end{cases}$$

最后令 $\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n)=\bigoplus\limits_k \Lambda^k_{\mathbf{R}}(n)$, $\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)=\bigoplus\limits_k \Lambda^k_{\mathbf{C}}(n)$.

在上面的一系列定义中，$\Lambda^k_{\mathbf{R}}(n)$、$\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n)$等是向量空间，并且在它们上有 $O(n)$左作用. 其实还可以在$\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n)$、$\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)$上引进外积，使它们成为外代数. 详情就不在此介绍了.

引理1.6.5 设 M 是 n 维黎曼流形. 令 $O(M)$ 是 M 上所有幺正标架的集合(它是一个 $O(n)$主丛). 取$O(n)$在 $\mathbf{R}^n$、$\Lambda^k_{\mathbf{R}}(n)$、$\Lambda^k_{\mathbf{C}}(n)$上的左作用如上，则有下列自然同构：

$$TM=O(M)\times_{O(n)}\mathbf{R}^n,$$
$$\Lambda^k(M)=\Gamma(O(M)\times_{O(n)}\Lambda^k_{\mathbf{R}}(n)),$$
$$\Lambda^k(M)\otimes\mathbf{C}=\Gamma(O(M)\times_{O(n)}\Lambda^k_{\mathbf{C}}(n)).$$

证明 取 $\sigma=\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是 M 上一个局部幺正标架场，即 $\sigma\in MF(O(M))$. 令 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 是 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的对偶标架场，即 ω_i 是一次微分式，并且满足

$$\omega_i(E_j)=\delta_{ij}, \ \forall i, j=1, \cdots, n.$$

对于任意的 $x\in U$, U 是σ的定义域，将 $O(M)\times_{O(n)}\mathbf{R}^n$, $O(M)\times_{O(n)}\Lambda^k_{\mathbf{R}}(n)$ 中的元素

$$\sigma(x)\times_{O(n)}\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}第 i 行, \quad \sigma(x)\times_{O(n)}\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}$$

分别对应于 $E_i(x)$, $\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}|_x$, 这便给出引理中寻求的自然

同构:

$$O(M)\times_{O(n)}\boldsymbol{R}^n=TM,$$

$$\Gamma(O(M)\times_{O(n)}\Lambda^k_{\mathbf{R}}(n))=\Lambda^k(M).$$

需要验证的细节在此略. 类似地, 有自然同构:

$$\Gamma(O(M)\times_{O(n)}\Lambda^k_{\mathbf{C}}(n))=\Lambda^k(M)\otimes\mathbf{C},$$

$$\Gamma(O(M)\times_{O(n)}\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n))=\Lambda^*(M).$$

引理证毕. ▌

由引理1.6.5可知: TM 是 $O(M)$ 的配丛. 我们已经知道在向量丛 TM 上有 Levi-Civita 联络:

$$\nabla: \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM): (X, Y)\mapsto\nabla_X Y.$$

回忆定理1.4.9(配联络的基本定理), 现在可以问: 在 $O(M)$ 上是否有一个主丛的联络, 使得它的配联络恰是上面的 Levi-Civita 联络? 事实上, 这个问题是早已解决了的. 在§1.2中, 我们曾对于 $\sigma=(E_1, \cdots, E_n)$ 造出

$$\omega_\sigma=\begin{pmatrix}\omega_{11} & \cdots & \omega_{1n}\\ \vdots & & \vdots\\ \omega_{n1} & \cdots & \omega_{nn}\end{pmatrix},$$

后来 $\{\omega_\sigma\}$ 被定义为主丛 $O(M)$ 上联络的一个范例. 注意到 ω_σ 是从 Levi-Civita 联络造出的, 并经简单验算又可知: 这样的主丛联络 $\{\omega_\sigma\}$ 在配丛 TM 上的配联络恰是 ∇, 从而我们自己提的问题就解决了. 这个问题的解决说明了所涉及的各种符号选用上是协调的. 同时也使我们以后可以自由使用"Levi-Civita 联络"这一术语, 它既可表示 ∇, 也可表示主丛联络 $\{\omega_\sigma\}$. 甚至 $\{\omega_\sigma\}$ 的一切配联络都称为 Levi-Civita 联络, 并且都用同一记号 ∇ 表示之.

引理1.6.6 设 M 是 n 维黎曼流形, 则对于任意局部幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$, 有

$$d=\sum_{i=1}^n\omega_i\wedge\nabla_{E_i}: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M),$$

$$\delta=-\sum_{i=1}^n i(E_i)\nabla_{E_i}: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k-1}(M),$$

其中 $\omega_j\wedge$、$i(E_j)$分别表示外乘 ω_j 与内乘 E_j 的算子，∇ 是配丛

$$O(M)\times_{O(n)}\Lambda_{\mathbf{R}}^k(n)$$

上的 Levi-Civita 联络.

证明 令

$$\Phi=d-\sum_i\omega_i\wedge\nabla_{E_i}: \Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M).$$

易见 Φ 是 $\mathscr{F}(M)$ 线性的，即对于任意的 $f\in\Lambda^0(M)=\mathscr{F}(M)$, $\alpha\in\Lambda^k(M)$,

$$\Phi(f\alpha)=f\Phi(\alpha).$$

换句话说，$\Phi\in\mathrm{Hom}_{\mathscr{F}(M)}(\Lambda^k(M),\ \Lambda^{k+1}(M))$.

上述事实验证如下：

$$\begin{aligned}\Phi(f\cdot\alpha)&=d(f\cdot\alpha)-\sum_i\omega_i\wedge\nabla_{E_i}(f\cdot\alpha)\\&=df\wedge\alpha+fd\alpha-\sum_i\omega_i\wedge(E_if)\alpha-\sum_i\omega_i\wedge f\nabla_{E_i}\alpha\\&=[df-\sum_i(E_if)\omega_i]\wedge\alpha+f\Phi(\alpha)=f\Phi(\alpha).\end{aligned}$$

类似地有下列性质：对 $\alpha\in\Lambda^k(M)$、$\beta\in\Lambda^l(M)$，有

$$\Phi(\alpha\wedge\beta)=\Phi(\alpha)\wedge\beta+(-1)^k\alpha\wedge\Phi(\beta).$$

至此可知，欲证 $d=\sum_i\omega_i\wedge\nabla_{E_i}$，相当于证明

$$\Phi(\omega_i)=0,\ \ \forall i=1,\ \cdots,\ n.$$

由引理1.2.4(i)知

$$d\omega_i=\sum_j\omega_{ji}\wedge\omega_j=\sum_{j,k}\Gamma_{ki}^j\omega_k\wedge\omega_j.$$

现在我们考察根据定理1.4.9作出的 $O(M)\times_{O(n)}\Lambda_{\mathbf{R}}^*(n)$ 上的配联络(Levi-Civita 联络)∇ 是什么样子的. 容易验证配对关系及外乘法：

$$B: \Lambda^1(M)\times\Gamma(TM)\to\mathscr{F}(M),$$
$$\wedge: \Lambda^k(M)\times\Lambda^l(M)\to\Lambda^{k+l}(M),$$

可解释为 $O(n)$不变乘法m诱导出的 $\mathscr{F}(M)$线性映射，于是定理1.4.9(ii)中的等式可确定配联络 ∇. 得到的结论是：

$$\nabla_{E_i}\omega_j=\sum_k\Gamma_{ij}^k\omega_k,$$

$$\nabla_{E_i}(\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_s})=(\nabla_{E_i}\omega_{j_1})\wedge\omega_{j_2}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_s}$$
$$+\omega_{j_1}\wedge(\nabla_{E_i}\omega_{j_2})\wedge\cdots\wedge\omega_{j_s}+\cdots$$
$$+\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge(\nabla_{E_i}\omega_{j_s}).$$

让我们回过头来继续证明引理 1.6.6. 此时有

$$\left(\sum_j\omega_j\wedge\nabla_{E_j}\right)(\omega_i)=\sum_{j,k}\omega_j\wedge\Gamma^k_{ji}\omega_k,$$

和上面 $d\omega_i$ 的等式比较即知

$$\Phi(\omega_i)=0.$$

这便证得
$$d=\sum_i\omega_i\wedge\nabla_{E_i}.$$

由于验证引理中的第二等式比较复杂，所以要采用一个使计算简化的手续. 由于 δ 与 $-\sum_s i(E_s)\nabla_s$ 都和局部幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的选取无关，所以只须在特别的标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 下验证

$$\delta=-\sum_s i(E_s)\nabla_s$$

就够了. 对于任意的 $x\in M$，我们选取在 x 某邻域上有定义的幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$，使得

$$\omega_{ij}|_x=0,\ \forall i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

(这样的 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 总是存在的，例如取沿着过 x 的各测地线平行的幺正标架场就合需要. 详情见§7.)为证

$$\delta=-\sum_s i(E_s)\nabla_{E_s},$$

只须对 M 上任意函数 f 和指标 $i_1, \cdots, i_k$，验证

$$\delta\alpha|_x=-\sum_s i(E_s)\nabla_{E_s}\alpha|_x$$

就行了，其中 $\alpha=f\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}$. 事实上

$$\begin{aligned}\delta\alpha|_x&=(-1)^{nk+n+1}\sum_{j_1<\cdots<j_{n-k}}*d\\&\quad\times[f\varepsilon(i_1\cdots i_kj_1\cdots j_{n-k})\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{n-k}}]|_x\\&=(-1)^{nk+n+1}\sum_{j_1<\cdots<j_{n-k}}\varepsilon(i_1\cdots i_kj_1\cdots j_{n-k})\\&\quad\times*[df\wedge\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{n-k}}]|_x\end{aligned}$$

$$=(-1)^{nk+n+1}\sum_{\substack{j_1<\cdots<j_{n-k}\\ i}}\varepsilon(i_1\cdots i_k j_1\cdots j_{n-k})$$
$$\times(E_i f)*[\omega_i\wedge\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{n-k}]|_x.$$

若令 $$I=(i_1,\cdots,i_k),\ J=(j_1,\cdots,j_{n-k}),$$
$$L=(l_1,\cdots,l_{k-1}),$$

则

$$\delta\alpha|_x=\frac{(-1)^{nk+n+1}}{(n-k)!}\sum_{J,i}\varepsilon(I,J)(E_i f)$$
$$\times*(\omega_i\wedge\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{n-k})|_x$$
$$=\frac{(-1)^{nk+n+1}}{(n-k)!(k-1)!}\sum_{J,i,L}(E_i f)\varepsilon(IJ)$$
$$\times\varepsilon(iJL)\omega_{l_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l_{k-1}}|_x$$
$$=\frac{(-1)^{nk+n+1}}{(n-k)!(k-1)!}\sum_{i,L}(E_i f)(n-k)!(-1)^{(n-k)(k-1)}$$
$$\times\varepsilon\begin{pmatrix}I\\ iL\end{pmatrix}\omega_{l_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l_{k-1}}|_x$$
$$=\frac{-1}{(k-1)!}\sum_{i,L}(E_i f)\varepsilon\begin{pmatrix}I\\ iL\end{pmatrix}\omega_{l_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l_{k-1}}|_x$$
$$=-\sum_i\sum_{l_1<\cdots<l_{k-1}}(E_i f)\varepsilon\begin{pmatrix}I\\ iL\end{pmatrix}\omega_{l_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{l_{k-1}}|_x$$
$$=-\sum_{s=1}^{k}(E_{i_s}f)(-1)^{s-1}\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}_{i_s}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}|_x$$
$$=-\sum_{l=1}^{n}(E_l f)i(E_l)\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}|_x$$
$$=-\sum_{l=1}^{n}i(E_l)\nabla_{E_l}(f\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k})|_x.$$

从而 $$\delta\alpha|_x=(-\sum_l i(E_l)\nabla_{E_l})\alpha|_x.$$

于是引理中第二等式成立. 最后我们指出在上述复杂的计算中曾用记号 $\hat{\omega}_{i_s}$. 这记号表示变元 ω_{i_s} 在算式中不出现. 至此引理 1.6.6 证毕. ▌

习题 1.6.7 设 M 是 n 维黎曼流形, $X\in\Gamma(TM)$, 任取幺正标架场 $\{E_1,\cdots,E_n\}$, 由下式

$$\operatorname{div} X=\sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{E_i}X,\ E_i\rangle$$

定义出 M 上的一个函数 $\operatorname{div} X$，称为 X 的散度(请读者验证：此定义与文献[22]第 197 页中的定义是一致的)．对于 $\alpha\in A^k(M)$、$\beta\in A^{k+1}(M)$，令

$$X=\sum_j\langle\alpha,\ i(E_j)\beta\rangle E_j.$$

试证
$$\langle d\alpha,\ \beta\rangle=\langle\alpha,\ \delta\beta\rangle+\operatorname{div} X.$$

下面我们讨论 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(M)}(A^*(M),\ A^*(M))$的结构．$\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(M)}(A^*(M),\ A^*(M))$是一个结合代数，我们将给出它的局部生成元．设 $\{E_1,\ \cdots,\ E_n\}$ 是 M 的局部幺正标架场，它的定义域是开集 U．令

$$E_j^+=\omega_j\wedge+i(E_j):A^*(M)\to A^*(M),$$
$$E_j^-=\omega_j\wedge-i(E_j):A^*(M)\to A^*(M).$$

确切来讲，$E_j^\pm$ 并不是 $A^*(M)$上的线性映射，而只是 $A^*(U)$上的线性映射．为了书写方便，我们把 $A^*(U)$就记为 $A^*(M)$了．

引理 1.6.8 诸 $E_j^\pm$ 满足下列关系：

$$\begin{cases}E_i^+E_j^++E_j^+E_i^+=2\delta_{ij};\\ E_i^+E_j^-+E_j^-E_i^+=0;\\ E_i^-E_j^-+E_j^-E_i^-=-2\delta_{ij}.\end{cases}$$

引理 1.6.8 的证明只是一些简单的计算，故略．

经过上面一段冗长的讨论，现在我们可以证明命题 1.6.4(ii)了．由引理 1.6.5 和引理 1.6.6 知 d、δ、$d+\delta$ 是线性微分算子，并且

$$d+\delta=L_a,$$

其中

$$a=\sum_i E_i^-\otimes E_i\in\operatorname{Hom}_{\mathscr{F}(M)}(A^*(M),\ A^*(M))\otimes\Gamma(TM)$$
$$=\Gamma(\operatorname{Hom}(E,\ F)\otimes ST),$$

而这里的向量丛 E、F 是

$$E=F=O(M)\times_{O(n)}A^*_{\mathbb{R}}(n).$$

对于 $\xi=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\omega_i|_x\in T_x^*M-\{0\}$，有

$$|\xi|=\sum_i\xi_i^2\neq 0,$$

且
$$[a](\xi)=\sum_i E_i^-\xi_i.$$

由于

$$\begin{aligned}\Big(-\sum_j\frac{\xi_j}{|\xi|^2}E_j^-\Big)\Big(\sum_i\xi_iE_i^-\Big)&=-\frac{1}{|\xi|^2}\sum_{i,j}\xi_j\xi_iE_j^-E_i^-\\&=-\frac{1}{2|\xi|^2}\sum_{i,j}\{\xi_j\xi_iE_j^-E_i^-+\xi_i\xi_jE_i^-E_j^-\}\\&=-\frac{1}{2|\xi|^2}\sum_{i,j}\xi_i\xi_j(-2\delta_{ij})=1,\end{aligned}$$

所以 $[a](\xi)=\sum\xi_iE_i^-$ 有逆，从而 $d+\delta$ 是椭圆的．命题1.6.4至此证毕．∎

令
$$\Lambda^{\mathrm{even}}(M)=\bigoplus_{k=\text{偶数}}\Lambda^k(M),$$
$$\Lambda^{\mathrm{odd}}(M)=\bigoplus_{k=\text{奇数}}\Lambda^k(M).$$

易见算子 $d+\delta$ 可以限制为

$$D_0\equiv d+\delta:\ \Lambda^{\mathrm{even}}(M)\to\Lambda^{\mathrm{odd}}(M),$$
$$D_1\equiv d+\delta:\ \Lambda^{\mathrm{odd}}(M)\to\Lambda^{\mathrm{even}}(M).$$

定义1.6.9 设 M 是 n 维黎曼流形，则称

$$D_0=d+\delta:\ \Lambda^{\mathrm{even}}(M)\to\Lambda^{\mathrm{odd}}(M)$$

为 de Rham-Hodge 算子．

容易从命题1.6.4的证明中看出：de Rham-Hodgo 算子也是椭圆算子．

假若 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形，令

$$\tau=\sqrt{-1}^{\,k(k-1)+l}*:\Lambda^k(M)\otimes\mathbf{C}\to\Lambda^{2l-k}(M)\otimes\mathbf{C}.$$

关于 τ 的性质有以下引理：

引理1.6.10 下列(i)～(iv)成立：

（i）$\tau^2=1$(具有此种性质的 τ，以后称为是 $\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}$ 的一个超结构)．

（ii）若令

$$\Lambda_+(M)=\{\omega\in\Lambda^k(M)\otimes\mathbf{C}\mid\tau\omega=\omega\},$$
$$\Lambda_-(M)=\{\omega\in\Lambda^k(M)\otimes\mathbf{C}\mid\tau\omega=-\omega\},$$

则有下列直和分解：

$$\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}=\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M).$$

(iii) $d+\delta$ 可以限制为

$$D_+\equiv d+\delta;\ \Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M),$$
$$D_-\equiv d+\delta;\ \Lambda_-(M)\to\Lambda_+(M).$$

(iv) 对于 M 上的任意向量场 X,

$$\nabla_X\tau=\tau\nabla_X.$$

并且在局部上

$$(\omega_j\wedge)\tau=\tau i(E_j),$$
$$i(E_j)\tau=\tau(\omega_j\wedge).$$

证明　如果 $\omega\in\Lambda^k(M)$，那么

$$\begin{aligned}\tau^2\omega&=\tau(\sqrt{-1}^{\,k(k-1)+l}*\omega)\\&=\sqrt{-1}^{\,(2l-k)(2l-k-1)+l+k(k-1)+l}**\omega\\&=\sqrt{-1}^{\,2k^2}(-1)^{2lk+k}\omega=\omega.\end{aligned}$$

从而(i)成立．由于(ii)是(i)的显然推论，故不证了．利用引理1.6.6可知(iii)是(iv)的推论．如果想直接证(iii)，可用引理1.6.3(iii)导出：τ 与 $(d+\delta)$ 是反交换的，即 $(d+\delta)\tau=-\tau(d+\delta)$．于是(iii)便得证．(iv)中第一等式和引理1.6.1(iv)中的等式是一样的．由于我们过去省略了引理1.6.1的证明，现在再一次用在论证引理1.6.6中第二等式时的简化技术来证明(iv)：对于任意的 $x\in M$，取 x 附近的幺正标架场 $\{E_1,\cdots,E_{2l}\}$，使得

$$\omega_{ij}|_x=0,\ \forall i,\ j=1,\cdots,2l.$$

不失一般性，取 $\omega=f\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k}$．我们只要能证明

$$\nabla_{E_i}*(f\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k})|_x=*\nabla_{E_i}(f\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k})|_x,$$

则便知　　$\nabla_X*=*\nabla_X$　与　$\nabla_X\tau=\tau\nabla_X$

了．由于有下列计算：

$$\begin{aligned}&\nabla_{E_i}*(f\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k})|_x\\&=\nabla_{E_i}\Big(\sum_{j_1<\cdots<j_{2l-k}}\varepsilon(i_1\cdots i_kj_1\cdots j_{2l-k})f\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{2l-k}}\Big)\Big|_x\end{aligned}$$

$$=\sum_{j_1<\cdots<j_{2l-k}}\varepsilon(i_1\cdots i_k j_1\cdots j_{2l-k})(E_i f)\omega_{j_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{j_{2l-k}}|_x$$
$$=*((E_i f)\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k})|_x$$
$$=*\nabla_{E_i}(f\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_k})|_x,$$

故欲证事实成立，若 $\omega\in\Lambda^k(M)$，利用引理1.6.3(iii)，有

$$\begin{aligned}\omega_j\wedge\tau(\omega)&=\sqrt{-1}^{\,k(k-1)+l}\omega_j\wedge*\omega\\&=\sqrt{-1}^{\,k(k-1)+l+2(k-1)}*i(E_j)\omega\\&=\sqrt{-1}^{\,k(k-1)+l+2(k-1)-(k-1)(k-2)-l}\tau i(E_j)\omega\\&=\tau i(E_j)\omega.\end{aligned}$$

同理有　$i(E_j)\tau\omega=\tau(\omega_j\wedge\omega)$，

于是引理得证. ▮

定义 1.6.11　设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形，则称

$$D_+=d+\delta:\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)$$

为 Signature 算子.

习题 1.6.12　设 M 是偶维定向黎曼流形，试证：

(i) Signature 算子是椭圆算子.

(ii) 若令

$$\begin{aligned}\Lambda^e_+(M)&=(\Lambda^{\text{even}}(M)\otimes\mathbf{C})\cap\Lambda_+(M),\\ \Lambda^o_+(M)&=(\Lambda^{\text{odd}}(M)\otimes\mathbf{C})\cap\Lambda_+(M),\\ \Lambda^e_-(M)&=(\Lambda^{\text{even}}(M)\otimes\mathbf{C})\cap\Lambda_-(M),\\ \Lambda^o_-(M)&=(\Lambda^{\text{odd}}(M)\otimes\mathbf{C})\cap\Lambda_-(M),\end{aligned}$$

则有下列直和分解：

$$\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}=\Lambda^e_+(M)+\Lambda^o_+(M)+\Lambda^e_-(M)+\Lambda^o_-(M).$$

(iii) $d+\delta:\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}\to\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}$ 可以限制为

$$d+\delta:\ \Lambda^e_\pm(M)\to\Lambda^o_\mp(M),$$
$$d+\delta:\ \Lambda^o_\pm(M)\to\Lambda^e_\mp(M).$$

并且这些限制的算子皆是椭圆微分算子.

下面我们以 Weitzenböck 公式来结束这一节的讨论.

定理 1.6.13(Weitzenböck 公式)　设 M 是 n 维黎曼流形，则在局部幺正标架场 $\{E_1,\cdots,E_n\}$ 下

$$(d+\delta)^2=-\Delta_0+\frac{1}{2}\sum_{i,j}E_i^-E_j^-R(E_i,\ E_j)$$
$$=-\Delta_0+\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}E_i^-E_j^-E_k^+E_l^+$$
$$+\frac{1}{4}\sum_{i,j}R_{ijij},$$

其中 Δ_0 是 Laplace-Beltrami 算子, 见定义 1.5.2; $\sum_{i,j}R_{ijij}$ 通常称为数量曲率.

证明 使用定理 1.4.9 列出的性质, 可以求出所有必需的 Levi-Civita 配联络. 已知 Levi-Civita 联络表现为

$$\nabla_{E_i}E_j=\sum_k\Gamma_{ij}^kE_k.$$

反复使用定理 1.4.9(ii) 可求得

$$\nabla_{E_i}\omega_j=\sum_k\Gamma_{ij}^k\omega_k,$$
$$\nabla_{E_i}(\omega_j\wedge)=\sum_k\Gamma_{ij}^k(\omega_k\wedge),$$
$$\nabla_{E_i}i(E_j)=\sum_k\Gamma_{ij}^ki(E_k),$$
$$\nabla_{E_i}E_j^{\pm}=\sum_k\Gamma_{ij}^kE_k^{\pm}.$$

于是有下列的计算:

$$(d+\delta)^2=\sum_{i,j}E_i^-\nabla_{E_i}E_j^-\nabla_{E_j}$$
$$=\sum_{i,j}\{E_i^-(\nabla_{E_i}E_j^-)\nabla_{E_j}+E_i^-E_j^-\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\}$$
$$=\sum_{i,j,k}E_i^-E_k^-\Gamma_{ij}^k\nabla_{E_j}+\sum_{i,j}E_i^-E_j^-\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}$$
$$=\sum_{i,j}E_i^-E_j^-D(E_i,\ E_j)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\{E_i^-E_j^-D(E_i,\ E_j)+E_j^-E_i^-D(E_j,\ E_i)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\{E_i^-E_j^-D(E_i,\ E_j)-E_i^-E_j^-D(E_j,\ E_i)$$
$$-2\delta_{ij}D(E_j,\ E_i)\}$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{i,j}E_i^-E_j^-R(E_i,\ E_j)-\Delta_0.$$

又由于

$$\sum_{i,j} E_i^- E_j^- R(E_i, E_j) = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} E_i^- E_j^- (\omega_k \wedge) i(E_l)$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} E_i^- E_j^- (E_k^+ + E_k^-)(E_l^+ - E_l^-)$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} (E_i^- E_j^- E_k^+ E_l^+ - E_i^- E_j^- E_k^- E_l^-)$$
$$+ \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} (- E_i^- E_j^- E_k^+ E_l^- + E_i^- E_j^- E_k^- E_l^+)$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} (E_i^- E_j^- E_k^+ E_l^+ - E_i^- E_j^- E_k^- E_l^-)$$
$$+ \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} (- E_i^- E_j^- E_k^+ E_l^- - E_i^- E_j^- E_l^+ E_k^-)$$
$$= \frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} (E_i^- E_j^- E_k^+ E_l^+ - E_i^- E_j^- E_k^- E_l^-),$$

以及从 Bianchi I 导出的计算:

$$O = \sum_{i,\alpha,\beta,\gamma} (R_{i\alpha\beta\gamma} + R_{i\gamma\alpha\beta} + R_{i\beta\gamma\alpha}) E_i^- E_\alpha^- E_\beta^- E_\gamma^-$$
$$= \sum_{i,\alpha,\beta,\gamma} R_{i\alpha\beta\gamma} (E_i^- E_\alpha^- E_\beta^- E_\gamma^- + E_i^- E_\beta^- E_\gamma^- E_\alpha^- + E_i^- E_\gamma^- E_\alpha^- E_\beta^-)$$
$$= 3 \sum_{i,\alpha,\beta,\gamma} R_{i\alpha\beta\gamma} E_i^- E_\alpha^- E_\beta^- E_\gamma^-$$
$$+ 2 \sum_{i,\alpha,\beta} (R_{\alpha ii\beta} - 2R_{\alpha i\beta i} + R_{\alpha\beta ii}) E_\alpha^- E_\beta^-$$
$$= 3 \sum_{i,\alpha,\beta,\gamma} R_{i\alpha\beta\gamma} E_i^- E_\alpha^- E_\beta^- E_\gamma^- + 6 \sum_{i,j} R_{ijij}.$$

即知定理1.6.13正确. 证毕. ▌

最后我们介绍一个记号, 以便以后更细致地描写 Δ_0. 设在 M 上取定局部幺正标架场 $\sigma = \{E_1, \cdots, E_n\}$, 令 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 是它的对偶标架场. 对于任意的 $\alpha \in A^k(M)$, 则在 σ 的定义域内 α 有唯一表达式

$$\alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1, \cdots, i_k} \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k},$$

此时对于任意的 $X \in \Gamma(TM)$, 令

$$X^\sigma \alpha = \sum_{i_1 < \cdots < i_k} (X f_{i_1, \cdots, i_k}) \omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}.$$

这里的 X^σ 就是我们要引入的记号, 它把 σ 的定义域上的函数映为另一个函数. X^σ 不但依赖于 X, 而且也依赖于 σ.

利用记号 X^σ, 可将 ∇_X 表为

$$\nabla_X = X^\sigma + \sum_{j,k} \omega_{kj}(X)\omega_k \wedge i(E_j)$$
$$= X^\sigma + \frac{1}{4}\sum_{j,k}\omega_{jk}(X)(E_j^+E_k^+ - E_j^-E_k^-).$$

接着可将 Δ_0 表为一种新的形式. 以后对此将有具体的陈述.

§1.7 法坐标系

本节介绍黎曼流形上的法坐标系, 它将有助于微分几何学的某些局部计算.

设 M 是 n 维黎曼流形, p 是其上的一点. 对于 p 点处切平面 T_pM 中任一向量 Y, 存在 $\varepsilon>0$, 当 $|Y| = \sqrt{\langle Y, Y\rangle} \leqslant \varepsilon$ 时, M 上有一条以 p 为起点, 以 Y 为切方向的测地线, 并且在此测地线上有一点 q, 使得由 p 到 q 的弧长是 $|Y|$. 此时我们记

$$q = \exp_p Y.$$

由此可见 $\exp_p$ 是从 T_pM 中 p 点的 ε 邻域到 M 的一个映射, 通常称为指数映射. 在 T_pM 中选定幺正标架 $\{E_1(p), \cdots, E_n(p)\}$ 之后, 每一个 Y 可表为

$$Y = y_1E_1(p) + \cdots + y_nE_n(p).$$

这时我们把 $(y_1, \cdots, y_n)$ 称为点 $q \equiv \exp_p Y$ 的法坐标. 根据文献 [27] 第 204 页的讨论, 可知 $(y_1, \cdots, y_n)$ 确实是流形 M 的局部坐标系.

定义 1.7.1 上述黎曼流形的局部坐标系 $(y_1, \cdots, y_n)$ 称为以 p 点为心的法坐标系.

定理 1.7.2 如果 $(y_1, \cdots, y_n)$ 是黎曼流形的一个局部坐标系, $p=(0, \cdots, 0)$ 是坐标邻域内的一个点, 则下列 (i) 与 (ii) 是等价的:

(i) $(y_1, \cdots, y_n)$ 是以 p 点为心的法坐标系.

(ii) 对于任意的 $i=1, \cdots, n$, 有下式成立:

$$y_i = \sum_{j=1}^n g_{ij}(y)\cdot y_j,$$

其中
$$g_{ij}(y)=\left\langle\frac{\partial}{\partial y_i},\ \frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle.$$

证明 (i)⇒(ii)：考虑 M 上一条曲线
$$p(t)=\exp_p t(a_1E_1(p)+\cdots+a_nE_n(p)),$$
其中$(a_1,\ \cdots,\ a_n)$是 $\mathbb{R}^n$ 中一固定的非零的点. 由定义 1.7.1 知：点 $p(t)$ 的法坐标是$(ta_1,\ \cdots,\ ta_n)$. 换句话说，如果$p(t)$在法坐标系下表为$(y_1(t),\ \cdots,\ y_n(t))$，则
$$y_i(t)=ta_i,\quad \forall\, i=1,\ \cdots,\ n.$$
对于 $t>0$, 点 $p(t)$所在的测地线的初始方向是
$$t(a_1E_1(p)+\cdots+a_nE_n(p)),$$
亦即是
$$(a_1E_1(p)+\cdots+a_nE_n(p)).$$
因此可知对于所有的$t>0$,$p(t)$在同一条测地线上(现在我们还不知道$p(t)$是不是测地线, 因为尚不清楚 t 是不是测地参数). 根据定义 1.7.1 知 $p(t)$到 $p(0)$的弧长是
$$|t(a_1E_1(p)+\cdots+a_nE_n(p)|=t\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2},$$
所以 t 与曲线 $p(t)$ 的弧长参数成比例. 从而可知 t 是测地参数. $p(t)$便是测地线了，也就是说它满足下列测地线方程：
$$y_i''(t)+\sum_{j,k}\Gamma_{jk}^i(y(t))\cdot y_j'(t)\cdot y_k'(t)=0,$$
其中
$$\Gamma_{jk}^i=\frac{1}{2}\sum_l g^{il}\left(\frac{\partial g_{jl}}{\partial y_k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial y_j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial y_l}\right).$$
上式中用的(g^{ij})是(g_{ij})的逆矩阵. 以
$$(y_1(t),\ \cdots,\ y_n(t))=(a_1t,\ \cdots,\ a_nt)$$
代入上述测地线方程，则得
$$\sum_{j,k}\Gamma_{jk}^i(ta)a_ja_k=0$$
或
$$\sum_{j,k}\left\{\frac{\partial g_{jl}}{\partial y_k}(ta)-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{jk}}{\partial y_l}(ta)\right\}a_ja_k=0. \tag{1.7.1}$$
由于从$p(0)$至$p(t)$的弧长是 $t\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$，故有
$$t\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}=\int_0^t\sqrt{\sum_{i,j}g_{ij}(y(s))y_i'(s)y_j'(s)}\,ds.$$

对上式两端求偏导数 $\frac{\partial}{\partial t}$，便得到：

$$\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}=\sqrt{\sum_{i,j} g_{ij}(y(t))y_i'(t)y_j'(t)},$$

于是有
$$a_1^2+\cdots+a_n^2=\sum_{i,j} g_{ij}(y(t))a_ia_j. \tag{1.7.2}$$

现在我们来考察函数

$$f(t)=\sum_i a_i g_{ij}(ta_1,\ \cdots,\ ta_n)-a_j.$$

利用公式(1.7.1)和(1.7.2)有

$$\begin{aligned} f'(t)&=\sum_{i,k} a_ia_k\frac{\partial g_{ij}}{\partial y_k}(ta_1,\ \cdots,\ ta_n)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_ia_k\frac{\partial g_{ik}}{\partial y_j}(ta_1,\ \cdots,\ ta_n)\\ &=\frac{1}{2}\sum_{i,k} a_ia_k\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{\partial g_{ik}(ta_1,\ \cdots,\ ta_n)}{\partial a_j}\\ &=\frac{1}{2t}\sum_{i,k}\left\{\frac{\partial(a_ia_k g_{ik}(ta))}{\partial a_j}-\frac{\partial(a_ia_k)}{\partial a_j}g_{ik}(ta)\right\}\\ &=\frac{1}{2t}\left\{\frac{\partial(\sum_i a_i^2)}{\partial a_j}-2\sum_i a_i g_{ij}\right\}=\frac{1}{t}\{-f(t)\}. \end{aligned}$$

这样便有
$$0=f'(t)+\frac{1}{t}f(t)=\frac{1}{t}\frac{\partial(tf(t))}{\partial t}.$$

从而
$$tf(t)=\text{常数}=\lim_{t\to 0}tf(t)=\sum_i a_i g_{ij}(0)-a_j=0.$$

因此
$$f(t)\equiv 0,$$

从而由(i)便证得(ii)．至于(ii)⇒(i)，由于较简单，故留作习题．至此便结束了定理1.7.2的证明．▌

设 p 是黎曼流形 M 上一个点，U_p 是 p 点的一个邻域，使得它属于法坐标邻域．对于任意的 $q\in U_p$，令 $\rho(q)$ 为 p 到 q 的距离．于是 ρ 是 U_p 上的一个函数．在 $U_p-\{p\}$ 上定义一个单位切向量场 $\frac{\partial}{\partial\rho}$，使得对于任意的 $q\in U_p-\{p\}$，$\left.\frac{\partial}{\partial\rho}\right|_q$ 是自 p 到 q 的测地线在 q 点处的单位切向量．显而易见，ρ 与 $\frac{\partial}{\partial\rho}$ 在一般坐标系中是很难表示的几何量，但是在以 p 为心的法坐标系 $(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 下，

$$\rho=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}=|y|,$$

$$\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{1}{|y|}\sum_{i=1}^{n}y_i\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

事实上,若 $$Y=y_1E_1(p)+\cdots+y_nE_n(p),$$

$$q=\exp_pY,$$

那么 q 点的法坐标是 $(y_1, \cdots, y_n)$,并且 p 与 q 间连接的唯一测地线的弧长是 $\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$. 众所周知,这段弧长恰是 p 到 q 的距离. 所以

$$\rho(q)=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

考虑测地线 $$p(t)=\exp_ptY=(ty_1, \cdots, ty_n).$$

它的切向量是

$$p'(t)=\frac{\partial(ty_1)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+\frac{\partial(ty_n)}{\partial t}\frac{\partial}{\partial y_n}$$

$$=y_1\frac{\partial}{\partial y_1}+\cdots+y_n\frac{\partial}{\partial y_n}.$$

$$|p'(t)|=\sqrt{\langle p'(t), p'(t)\rangle}$$

$$=\sqrt{\sum_{i,j}y_iy_j\left\langle\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle}$$

$$=\sqrt{\sum_{i,j}y_iy_jg_{ij}}=\sqrt{\sum_i y_i^2}=|y|.$$

于是 $$\frac{\partial}{\partial\rho}=\frac{1}{|p'(t)|}p'(t)=\frac{1}{|y|}\sum_i y_i\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

定理 1.7.2 有以下推论:

推论 1.7.3(高斯引理) 设 X 是 $U_p-\{p\}$ 中任意一个切向量,则

$$X\rho=\left\langle X, \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle.$$

证明 设 $X=\sum_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial y_i}$,于是

$$X\rho=\sum_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial y_i}\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}=\sum_i\frac{\lambda_iy_i}{|Y|},$$

$$\left\langle X,\ \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle=\frac{1}{|Y|}\left\langle\sum_i\lambda_i\frac{\partial}{\partial y_i},\ \sum_j y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle$$
$$=\frac{1}{|Y|}\sum_{i,j}\lambda_i y_j g_{ij}=\frac{1}{|Y|}\sum_i\lambda_i y_i.$$

从而高斯引理得证. ▌

设$(y_1,\ \cdots,\ y_n)$是以p为心的法坐标系. 令$E_i(p)=\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_p$. 于是$\{E_1(p),\ \cdots,\ E_n(p)\}$是$T_pM$中的幺正标架. 令$\{E_1,\cdots,E_n\}$是$p$点附近的幺正标架场, 使得沿着过$p$的测地线是平行的, 并且在$p$点恰是$\{E_1(p),\ \cdots,\ E_n(p)\}$.

引理 1.7.4 下列等式成立:

$$\sum_i y_i\frac{\partial}{\partial y_i}=\sum_i y_iE_i.$$

证明 对于固定的$(y_1,\ \cdots,\ y_n)\in\mathbf{R}^n-\{0\}$, 考虑测地线

$$r(t)=\exp_p\frac{t}{|y|}(y_1E_1(p)+\cdots+y_nE_n(p)),$$

其中
$$|y|=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

在法坐标系下, 这条测地线表为

$$r(t)=(y_1(t),\ \cdots,\ y_n(t))=\left(\frac{y_1}{|y|}t,\ \cdots,\ \frac{y_n}{|y|}t\right).$$

从而
$$\dot r(t)=\sum_i\frac{y_i}{|y|}\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{r(t)}.$$

我们把$\left.\frac{\partial}{\partial y_i}\right|_{r(t)}$记为$\frac{\partial}{\partial y_i}(r(t))$. 由于$\dot r(t)$和$E_i(r(t))$皆是沿着$r$平行的, 所以它们之间的线性关系与$t$无关. 容易验证在$r(0)$处有

$$\dot r(0)=\sum_i\frac{y_i}{|y|}\frac{\partial}{\partial y_i}(r(0))=\sum_i\frac{y_i}{|y|}E_i(r(0)),$$

所以
$$\dot r(t)=\sum_i\frac{y_i}{|y|}E_i(r(t)),$$

即有
$$\sum_i y_i\frac{\partial}{\partial y_i}(r(t))=\sum_i y_iE_i(r(t)).$$

特别当$t=|y|$时, 上式即为所求. 引理证毕. ▌

令 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 是 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的对偶标架场，ω_{ij} 由下式确定：

$$\nabla E_i = \sum_j \omega_{ji} E_j.$$

这时有以下引理：

引理 1.7.5 $\{\omega_i, \omega_{ij}\}$ 有下列性质：

(i) $\sum_j y_j \omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = y_i$;

(ii) $\sum_j y_j \omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = 0$;

(iii) $d\omega_i = \sum_j \omega_{ji} \wedge \omega_j$ 且 $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$.

证明 由于

$$\sum_j y_j \omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \omega_i\left(\sum_j y_j \frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \omega_i\left(\sum_j y_j E_j\right) = y_i,$$

故(i)成立．又由于

$$\sum_{j,k} y_j \omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) E_k = \nabla_{\sum y_j \frac{\partial}{\partial y_j}} E_l = \nabla_{\rho \frac{\partial}{\partial \rho}} E_l = 0,$$

故(ii)成立．至于(iii)，在引理 1.2.4 中已证过了．引理证毕．∎

令 $$H_{ij} = \omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\quad H_{ikl} = \omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right).$$

于是引理 1.7.5 等价于下列引理 1.7.5′.

引理 1.7.5′ $\{H_{ij}, H_{ikl}\}$ 有下列性质：

(i) $\sum_j y_j H_{ij} = y_i$;

(ii) $\sum_j y_j H_{jkl} = 0$;

(iii) $\begin{cases} \dfrac{\partial H_{i\alpha}}{\partial y_\beta} - \dfrac{\partial H_{i\beta}}{\partial y_\alpha} = \sum_j (H_{\beta ji} H_{j\alpha} - H_{\alpha ji} H_{j\beta}), \\ H_{ikl} = -H_{ilk}. \end{cases}$

引理 1.7.5′ 极易从引理 1.7.5 导出，反之亦然．所以在此不证了．下面给出它们的一个推论：

推论 1.7.6 下列等式成立：

$$\sum_j y_j H_{ji} - y_i.$$

证明 由引理 1.7.5′(iii)得:

$$\sum_\beta\left(y_\beta \frac{\partial H_{i\alpha}}{\partial y_\beta} - y_\beta \frac{\partial H_{i\beta}}{\partial y_\alpha}\right)$$
$$= \sum_{j,\beta}(y_\beta H_{\beta ji} H_{j\alpha} - y_\beta H_{\alpha ji} H_{j\beta}).$$

在上述等式中:

$$\text{左式} = \sum_\beta y_\beta \frac{\partial}{\partial y_\beta} H_{i\alpha} - \sum_\beta \frac{\partial (y_\beta H_{i\beta})}{\partial y_\alpha} + \sum_\beta \frac{\partial y_\beta}{\partial y_\alpha} H_{i\beta}$$
$$= \sum_\beta y_\beta \frac{\partial H_{i\alpha}}{\partial y_\beta} - \delta_{i\alpha} + H_{i\alpha};$$

$$\text{右式} = -\sum_{j,\beta} y_\beta H_{\alpha ji} H_{j\beta} = -\sum_j y_j H_{\alpha ji}.$$

因此

$$\sum_\beta y_\beta \frac{\partial H_{i\alpha}}{\partial y_\beta} - \delta_{i\alpha} + H_{i\alpha} = -\sum_j y_j H_{\alpha ji}. \qquad (1.7.8)$$

由上式及引理 1.7.5′(iii) 中第二等式可得:

$$\sum_i y_i \left(\sum_\beta y_\beta \frac{\partial H_{i\alpha}}{\partial y_\beta} - \delta_{i\alpha} + H_{i\alpha}\right) = 0.$$

将上式整理, 得到:

$$\sum_\beta y_\beta \frac{\partial}{\partial y_\beta} \left(\sum_i y_i H_{i\alpha} - y_\alpha\right) = 0.$$

沿着过原点的测地线, 上式变为

$$\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\sum_i \rho x_i H_{i\alpha}(\rho x) - \rho x_\alpha\right) = 0,$$

其中 $$\rho = |y|, \quad x_i = \frac{y_i}{\rho},$$

$$x = (x_1, \cdots, x_n) = \left(\frac{y_1}{\rho}, \cdots, \frac{y_n}{\rho}\right).$$

从而得 $$\sum_i \rho x_i H_{i\alpha}(\rho x) - \rho x_\alpha = 0.$$

从而证得推论 1.7.6. ▌

注 1.7.7 现在我们研究定理 1.7.2(ii)、推论 1.7.3、引理 1.7.4、引理 1.7.5、引理 1.7.5′ 和推论 1.7.6 之间的关系. 请读

者验证下列三组等价的条件后，它们的关系便显而易见了.

(1) Gauss 引理 $\Leftrightarrow \left\langle X, \dfrac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle = X\rho,\ \forall X$

$$\Leftrightarrow \omega_i\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\right) = d\rho(E_i),\ \forall i$$

$$\Leftrightarrow y_i = \sum_j g_{ij} y_j,\ \forall i.$$

(2) $\dfrac{\partial}{\partial\rho} = \sum_i \dfrac{y_i}{\rho} E_i \Leftrightarrow \omega_i\left(\dfrac{\partial}{\partial\rho}\right) = \dfrac{y_i}{\rho},\ \forall i$

$$\Leftrightarrow y_i = \sum_j y_j H_{ij},\ \forall i.$$

(3) $d\rho = \sum_i \dfrac{y_i}{\rho}\omega_i \Leftrightarrow d\rho(E_i) = \dfrac{y_i}{\rho},\ \forall i$

$$\Leftrightarrow y_i = \sum_j y_j H_{ji}.$$

定理 1.7.8 如果 $(y_1, \cdots, y_n)$ 是黎曼流形 M 上一个以 $p=(0, \cdots, 0)$ 为原点的坐标系；$\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 是一个标架场的对偶标架场(简称余标架场)；ω_{ij} $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 是一组一次微分式，使得：

(1) 黎曼度量 $g(\ ,\ ) = \omega_1^2 + \cdots + \omega_n^2$;

(2) 引理 1.7.5 的结论(i)、(ii)、(iii)成立.

则

(A) $(y_1, \cdots, y_n)$ 是以 p 为心的法坐标系.

(B) 对偶于 $\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 的标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 是沿着过 p 点的测地线平行的幺正标架场.

(C) ω_{ki} 是 Levi-Civita 联络在标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 下的表现，即

$$\nabla E_i = \sum_j \omega_{ji} E_j.$$

证明 当令

$$H_{ij} = \omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\quad H_{ikl} = \omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

之后，已知条件(2)就相当于引理 1.7.5′ 成立. 并且从

$$g(\ ,\ ) = \sum_i \omega_i^2 = \sum_{i,j,k} (H_{ij}\cdot dy_j)(H_{ik} dy_k)$$

得 $$\left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle = \sum_k H_{ki} H_{kj}.$$

用引理 1.7.5′(i)和引理 1.7.5′ 的推论(推论 1.7.6)得

$$\sum_i y_i \left\langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \right\rangle = \sum_{i,k} y_i H_{ki} H_{kj} = y_j.$$

于是再用定理 1.7.2 即得到结论(A). 又容易从引理 1.7.5 的结论(ii)与(iii)推知结论(B)与(C)成立. 定理得证. ▌

令 $$\hat{d} = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial y_i} = \rho \frac{\partial}{\partial \rho},$$

$\hat{d}$ 是一个非常重要的向量场,它在法坐标邻域中处处有定义. 引理 1.7.4 就给出一个关于 $\hat{d}$ 的等式. 在本书后面的讨论中将会经常用到它.

定理 1.7.9 下列等式成立:

$$\begin{cases} \hat{d} H_{ij} = \delta_{ij} - H_{ij} + \sum_k y_k H_{jik}, \\ \hat{d} H_{ikl} = -H_{ikl} + \sum_{\alpha,\beta} y_\beta R_{\beta\alpha kl} H_{\alpha i}. \end{cases}$$

其中 $$R_{ijkl} = \Omega_{kl}(E_i, E_j) \quad (\text{参见 §1.2}).$$

证明 本定理中的第一个等式已在推论 1.7.6 的证明过程中出现过(参见等式(1.7.3)). 至于第二等式, 可以从下列计算求得:

$$\begin{aligned} \hat{d} H_{ikl} &= \hat{d}\left(\omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)\right) \\ &= (d\omega_{kl})\left(\hat{d}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) + \frac{\partial}{\partial y_i} \omega_{kl}(\hat{d}) \\ &\quad + \omega_{kl}\left(\left[\hat{d}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right]\right) \\ &= \left(\Omega_{kl} - \sum_s \omega_{ks} \wedge \omega_{sl}\right)\left(\hat{d}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) - \omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) \\ &= \Omega_{kl}\left(\hat{d}, \frac{\partial}{\partial y_i}\right) - H_{ikl} \\ &= -H_{ikl} + \sum_{\alpha,\beta} y_\beta R_{\beta\alpha kl} H_{\alpha i}. \end{aligned}$$

定理证毕. ▌

习题 1.7.10　试用定理 1.7.9 证明下列泰勒展开式：

$$H_{ij}=\delta_{ij}+\frac{1}{6}\sum_{k,l}R_{iklj}(p)y_ky_l+\cdots,$$

$$H_{ijk}=\frac{1}{2}\sum_{l}R_{lijk}(p)y_l+\cdots.$$

引理 1.7.11　若记

$$G=(\det(H_{ij}))^2=\det\left(\left\langle\frac{\partial}{\partial y_i},\ \frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle\right),$$

则下列等式成立：

$$\Delta_0\rho=\frac{1}{\rho}(n-1+\hat{\partial}\log\sqrt{G}),$$

其中　$$\rho=|y|=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

证明　利用高斯引理(推论 1.7.3)有

$$E_i\rho=\left\langle E_i,\ \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle=\left\langle E_i,\ \sum_j\frac{y_j}{\rho}E_j\right\rangle=\frac{y_i}{\rho}.$$

(当然也可用注 1.7.7 中的公式 $\sum_i y_i\omega_i=\sum_i y_i\,dy_i$ 给出以下计算：$E_i\rho=d\rho\,(E_i)=\sum_j\frac{y_j}{\rho}\,dy_j(E_i)=\sum_j\frac{y_j}{\rho}\,\omega_j(E_i)=\frac{y_i}{\rho}.$) 记矩阵 (H_{ij}) 的逆矩阵为 (H^{ij}). 由于

$$\frac{\partial}{\partial y_i}=\sum_j H_{ji}E_j,\quad E_i=\sum_j H^{ji}\frac{\partial}{\partial y_j},$$

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial y_i}}E_j=\sum_k H_{ikj}E_k.$$

故有下列计算：

$$\begin{aligned}\Delta_0\rho&=\sum_i E_iE_i\rho-\sum_i(\nabla_{E_i}E_i)\rho\\&=\sum_i\left\{E_i\left(\frac{y_i}{\rho}\right)-\sum_{j,k}H^{ji}H_{jki}E_k\rho\right\}\\&=\sum_{i,j}\frac{H^{ji}\delta_{ij}}{\rho}-\sum_i\frac{y_iy_i}{\rho^3}-\sum_{i,j,k}H^{ji}H_{jki}\frac{y_k}{\rho}\\&=\sum_i\frac{H^{ii}}{\rho}-\frac{1}{\rho}-\sum_{i,j,k}\frac{1}{\rho}H^{ji}H_{jki}y_k.\end{aligned}$$

由于

$$\frac{\hat{\partial}\sqrt{G}}{\sqrt{G}}=\frac{1}{\sqrt{G}}\hat{\partial}\det(H_{ij})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j}(\hat{\partial}H_{ij})\cdot(H_{ij}\text{元的代数余子式})$$
$$=\frac{1}{\sqrt{G}}\sum_{i,j}(\hat{\partial}H_{ij})\cdot(\sqrt{G}\,H^{ji})$$
$$=\sum_{i,j}(\delta_{ij}-H_{ij}+\sum_k y_k H_{ij|k})H^{ji}$$
$$=\sum_i H^{ii}-n+\sum_{i,j,k}H^{ji}H_{ij|k}y_k,$$

故

$$\Delta_0\rho=-\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\hat{\partial}\sqrt{G}}{\sqrt{G}}+n\right)$$
$$=\frac{1}{\rho}(n-1+\hat{\partial}\log\sqrt{G}).$$

引理证毕. ▌

前面我们对法坐标系作了系统的介绍.现在也许有人会问:法坐标系在微分几何学的计算中会带来什么好处呢?这可以说是一个一时难以说明白的问题.从经验上看,法坐标系对本书以后的讨论带来两处方便:一是出现在与 ρ、$\frac{\partial}{\partial\rho}$ 有关的计算中,因为 ρ 与 $\frac{\partial}{\partial\rho}$ 在一般坐标系下很难描写;另一是在探讨一个几何量在一点处的泰勒展开式的概念时,相对于法坐标系的展开式往往是优先考虑的对象.下面我们讲述泰勒展开式的问题.假设 E 是 M 上一个向量丛,$\varphi\in\Gamma(E)$,$p\in M$.那末几何量 φ 在 p 点处的泰勒展开式是什么?如果在E上选取一个局部标架场 $\sigma=\{\sigma_1,\cdots,\sigma_N\}$,在 M 上选取以 p 为原点的局部坐标系$(x_1,\cdots,x_n)$,则 φ 可表为

$$\varphi(x)=\sum_{i=1}^{N}\varphi_i(x_1,\cdots,x_n)\sigma_i.$$

于是可以把

$$\varphi_p(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{m_1+\cdots+m_n=m}\left[\sum_{i=1}^{N}\frac{(m_1!)\cdots(m_n!)}{m!}\times\frac{\partial^m\varphi_i}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}(0)\sigma_i\right]x_1^{m_1}\cdots x_n^{m_n}$$

称为φ在p点处的泰勒展开式. 可是$\varphi_p(x)$的定义依赖于σ与坐标系$(x_1, \cdots, x_n)$的选取, 并且这个依赖关系十分复杂, 所以我们只能在特别选定的σ与$(x_1, \cdots, x_n)$下讲泰勒展开式. 下面选取的参照系是合适的: σ是沿着过p点的测地线平行的局部标架场, $(x_1, \cdots, x_n)$是以p为心的法坐标系$(y_1, \cdots, y_n)$. 对于别的几何量, 例如线性微分算子等, 考虑它们的泰勒展开式时, 也是在合适地选取σ与$(y_1, \cdots, y_n)$之下进行的.

泰勒展开式中的系数

$$\frac{\partial^m \varphi_i}{\partial x_1^{m_1}\cdots\partial x_n^{m_n}}(0)$$

如何用φ的协变导数表示出来呢? 一般来说是相当复杂的. 在m很大时很难求出这种表示式来. 但是当$(x_1, \cdots, x_n)$是法坐标系时, 结果却非常简单.

命题 1.7.12 设M是n维黎曼流形, $(y_1, \cdots, y_n)$是以p点为心的法坐标系, φ是M上的可微函数, 则

$$\frac{\partial^m \varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_m}}(0)=\frac{1}{m!}\sum_{\pi} D\left(\frac{\partial}{\partial y_{i_{\pi(1)}}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{i_{\pi(m)}}}\right)\varphi\Big|_p,$$

其中π是集合$\{1, 2, \cdots, m\}$的置换; $D(\cdots)$的定义见定义1.5.4.

证明 我们只需证明下列等式就行了:

$$\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m}\frac{\partial^m \varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_m}}(0)$$
$$=\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m}\left[D\left(\frac{\partial}{\partial y_{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{i_m}}\right)\Big|_p\right].$$

实际上是归纳地证明下列等式:

$$\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m}\frac{\partial^m \varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_m}}$$
$$=\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m} D\left(\frac{\partial}{\partial y_{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial y_{i_m}}\right)\varphi.$$

假设在m时已有上述等式, 下面计算

$$\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}} y_{i_1}\cdots y_{i_{m+1}}\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_{m+1}}}=\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m}\hat{\partial}\frac{\partial^m \varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_m}}$$

$$
\begin{aligned}
&=\hat{d}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m}\frac{\partial^m\varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_m}}\Big)\\
&\quad-\sum_{i_1,\cdots,i_m}[\hat{d}(y_{i_1}\cdots y_{i_m})]\frac{\partial^m\varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_m}}\\
&=\hat{d}\Big(\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m}D\Big(\frac{\partial}{\partial y_{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_{i_m}}\Big)\varphi\Big)\\
&\quad-m\sum_{i_1,\cdots,i_m} y_{i_1}\cdots y_{i_m}\frac{\partial^m\varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_m}}\\
&=\hat{d}D(\underbrace{\hat{d},\cdots,\hat{d}}_{m\text{个}})\varphi-mD(\underbrace{\hat{d},\cdots,\hat{d}}_{m\text{个}})\varphi\\
&=D(\underbrace{\hat{d},\cdots,\hat{d}}_{m+1\text{个}})\varphi+D(\nabla_{\hat{d}}\underbrace{\hat{d},\hat{d},\cdots,\hat{d}}_{m\text{个}})\\
&\quad+\cdots+D(\hat{d},\cdots,\hat{d},\nabla_{\hat{d}}\hat{d})-mD(\underbrace{\hat{d},\cdots,\hat{d}}_{m\text{个}})\varphi.
\end{aligned}
$$

注意到 $\nabla_{\hat{d}}\hat{d}=\hat{d}$ $\Big($这里的 $\hat{d}=\sum_i y_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}=\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}=\sum_i y_iE_i\Big)$，故

$$
\begin{aligned}
\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}} y_{i_1}\cdots y_{i_{m+1}}\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial y_{i_1}\cdots\partial y_{i_{m+1}}}&=D(\underbrace{\hat{d},\cdots,\hat{d}}_{m+1\text{个}})\varphi\\
&=\sum_{i_1,\cdots,i_{m+1}} y_{i_1}\cdots y_{i_{m+1}}D\Big(\frac{\partial}{\partial y_{i_1}},\cdots,\frac{\partial}{\partial y_{i_{m+1}}}\Big)\varphi.
\end{aligned}
$$

至此可知命题成立. ▌

对于一般的几何量(不一定是函数 φ)，它们在极坐标下的泰勒展开式也具有像命题1.7.12陈述的性质. 这些性质我们用不着，故不赘述了. 这里的讲法只是想引起大家对法坐标系的注意，仅此而已.

§1.8 二维球面上的一些计算

这一节介绍半径为 r 的球面上的计算，特别是关于 Δ_0 的计算. 这是一些很有教益的范例. 它们既有助于复习前面讲过的概念，又有助于以后深入的讨论.

$S^2(r)=\{(x, y, z)\in\mathbf{R}^3|x^2+y^2+z^2=r^2\}$ 称为 $\mathbf{R}^3$ 中一个半径为 r 的球面.

(I) 黎曼坐标

黎曼在 1854 年的就职演说中曾写下一个度量，而后断言它的曲率是常数. 这个度量就是

$$dS^2=\frac{du_1^2+\cdots+du_n^2}{\left(1+\frac{1}{4r^2}(u_1^2+\cdots+u_n^2)\right)^2},$$

其中的坐标$(u_1, \cdots, u_n)$不妨称为黎曼坐标. 在 $n=2$ 时，上述的 ds^2 就是 $S^2(r)$上的标准黎曼度量. 黎曼坐标(u_1, u_2)就是下面要仔细描述的"球极投影坐标". 以下就验证之：

$S^2(r)$上的点 $N\equiv(0, 0, r)$ 与 $S\equiv(0, 0, -r)$ 分别称为北极与南极.

$$\pi=\{(x, y, z)\in\mathbf{R}^3|z=-r\}$$

是南极点 S 处的切平面(如图1.1). 对于球面上的任意一点 $d=(x, y, z)$，只要 $p\neq N$，则可作连接 N 与 p 的直线交 π 与 p'. 记 p' 点的坐标为$(u_1, u_2, -r)$. 这时称(u_1, u_2)为球面上点 p 的"球极投影坐标". 容易求出 p 点的笛卡儿坐标(x, y, z)与球极投影坐标(u, v)之间有下列关系：

$$\begin{cases}x=\dfrac{4r^2u_1}{u_1^2+u_2^2+4r^2},\\ y=\dfrac{4r^2u_2}{u_1^2+u_2^2+4r^2},\\ z=\dfrac{r(u_1^2+u_2^2-4r^2)}{u_1^2+u_2^2+4r^2}.\end{cases}$$

由此可得

$$dx=\frac{-4r^2u_1^2+4r^2u_2^2+16r^4}{\Delta^2}du_1-\frac{8r^2u_1u_2}{\Delta^2}du_2,$$

$$dy=-\frac{8r^2u_1u_2}{\Delta^2}du_1+\frac{4r^2u_1^2-4r^2u_2^2+16r^4}{\Delta^2}du_2,$$

$$dz=\frac{16r^3u_1}{\Delta^2}du_1+\frac{16r^3u_1}{\Delta^2}du_2.$$

图 1.1　　　　图 1.2

其中
$$\Delta = u_1^2 + u_2^2 + 4r^2.$$
经验算，得
$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \frac{du_1^2 + du_2^2}{\left(1 + \frac{1}{4r^2}(u_1^2 + u_2^2)\right)^2}.$$
至此即称(u_1, u_2)为$S^2(r)$的黎曼坐标.

(II) 令(y_1, y_2)是$S^2(r)$上以南极S为心的法坐标系，使得$\frac{\partial}{\partial y_1}(S)$与$\frac{\partial}{\partial y_2}(S)$分别平行于$\mathbf{E}^3$中的$x$轴和$y$轴. 我们先来求点$p$的法坐标$(y_1, y_2)$与笛卡儿坐标$(x, y, z)$之间的关系. 由于过$p$点的经线是测地线，故在这条经线上$\frac{y_1}{y_2}$是常数. 易知在经线上的$\frac{x}{y}$也是常数，从而有
$$\begin{cases} y_1 = \lambda x, \\ y_2 = \lambda y. \end{cases}$$
其中λ是定义在每一条经线上的函数. 由于$\sqrt{y_1^2 + y_2^2}$等于南极S至p点的弧长，故(参见图 1.2)
$$\sqrt{y_1^2 + y_2^2} = r\alpha,$$
其中
$$\alpha = \angle SOp.$$
另外又有
$$\sqrt{x^2 + y^2} = r \sin \alpha.$$
于是有下列等式：
$$r\alpha = \sqrt{y_1^2 + y_2^2} = \sqrt{(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2} = \lambda\sqrt{x^2 + y^2} = \lambda r \sin \alpha,$$

即
$$\lambda=\frac{\alpha}{\sin\alpha}.$$

若令
$$\rho=\sqrt{y_1^2+y_2^2},$$

则有
$$\begin{cases} x=\dfrac{\sin\dfrac{\rho}{r}}{\dfrac{\rho}{r}}y_1, \\ y=\dfrac{\sin\dfrac{\rho}{r}}{\dfrac{\rho}{r}}y_2, \\ z=-r\cos\dfrac{\rho}{r}. \end{cases}$$

下面计算在法坐标系下黎曼度量 ds^2 的表达式，记 $\theta=\frac{\rho}{r}$，于是
$$dx=\frac{\sin\theta}{\theta}dy_1+y_1\frac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}d\theta,$$
$$dy=\frac{\sin\theta}{\theta}dy_2+y_2\frac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}d\theta,$$
$$dz=r\sin\theta\,d\theta.$$

进而有
$$\begin{aligned} ds^2&=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2\\ &=\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}(dy_1^2+dy_2^2)+(y_1^2+y_2^2)\left(\frac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}\right)^2d\theta^2\\ &\quad+2\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\theta\cos\theta-\sin\theta}{\theta^2}(y_1dy_1+y_2dy_2)d\theta\\ &\quad+r^2\sin^2\theta\,d\theta^2\\ &=\frac{\sin^2\theta}{\theta^2}(dy_1^2+dy_2^2)+r^2d\theta^2-\frac{r^2}{\theta^2}\sin^2\theta\,d\theta^2, \end{aligned}$$

所以
$$ds^2=\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2\left(\sum_{i=1}^{2}(dy_i)^2\right)+\left(1-\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2\right)(d\rho)^2,$$

换句话说

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial y_i},\ \frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle=\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2\delta_{ij}$$

$$+\left(1-\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2\right)\frac{y_iy_j}{\rho^2}.$$

注 从上述等式可推出:

$$\sum_i y_ig_{ij}=y_j.$$

故由定理1.7.2可知$(y_1,\ y_2)$确实是法坐标系.

(III) 曲率

参看文献[27]第二章§2的幺正活动标架法,首先将ds^2化为对角形,即

$$ds^2=\omega_1^2+\omega_2^2.$$

为此可按下列公式选取ω_i:

$$\omega_i=\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}dy_i+\left(1-\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)\frac{y_i}{\rho}d\rho.$$

由于

$$\sum_{i=1}^{2}(\omega_i)^2=\sum_i\left\{\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2(dy_i)^2+2\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\left(1-\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)\right.$$

$$\left.\times\frac{y_idy_i}{\rho}d\rho+\left(1-\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2\frac{y_i^2}{\rho^2}(d\rho)^2\right\}$$

$$=\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2\sum_i(dy_i)^2+\left(1-\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)^2\right)(d\rho)^2$$

$$=ds^2.$$

可见上面选取的 ω_i 确实能使 ds^2 化为对角形.

引理 1.8.1 设 ω_i 的选取如上，则

(i) $$dy_i=\frac{\frac{\rho}{r}}{\sin\frac{\rho}{r}}\omega_i+\left(1-\frac{\frac{\rho}{r}}{\sin\frac{\rho}{r}}\right)\frac{y_i}{\rho}\sum_j\frac{y_j}{\rho}\omega_j.$$

(ii) $$d\rho=\sum_i\frac{y_i}{\rho}\omega_i.$$

证明 以(i)代入 ω_i 的定义式，则得恒等式. 由此可知(i)成立. 将(i)代入下式:

$$d\rho=\sum_i\frac{y_i}{\rho}dy_i,$$

便得(ii). 故证得引理. ▌

下面用 $\{\omega_i\}$ 来计算曲率. 因为

$$\begin{aligned}
d\omega_i&=\left(\frac{\cos\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}-\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\left(\frac{\rho}{r}\right)^2}\right)\frac{d\rho}{r}\wedge dy_i\\
&\quad+\left(1-\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)\frac{dy_i}{\rho}\wedge d\rho\\
&=\left(1-\cos\frac{\rho}{r}\right)\frac{1}{\rho}dy_i\wedge d\rho\\
&=\sum_j\left(1-\cos\frac{\rho}{r}\right)\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\frac{\rho}{r}}{\sin\frac{\rho}{r}}\omega_i\wedge\frac{y_j}{\rho}\omega_j\\
&=\sum_j\frac{1-\cos\frac{\rho}{r}}{\sin\frac{\rho}{r}}\cdot\frac{1}{\rho r}(y_j\omega_i-y_i\omega_j)\wedge\omega_j,
\end{aligned}$$

由引理 1.2.4(i)知

$$\omega_{ij}=\frac{1-\cos\frac{\rho}{r}}{\rho r\sin\frac{\rho}{r}}(y_i\omega_j-y_j\omega_i).$$

习题1.8.2 试按引理 1.2.4(ii)求出曲率，得

$$\Omega_{ij}=\frac{1}{r^2}\omega_i\wedge\omega_j.$$

(IV) 设 $\{E_1, E_2\}$ 是与 $\{\omega_1, \omega_2\}$ 对偶的标架场．利用定理 1.7.8，我们要证明 $\{E_1, E_2\}$ 沿着每条过南极 S 的测地线平行．这只须验证引理 1.7.5(ii)就够了．由于

$$\omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)=\frac{1-\cos\frac{\rho}{r}}{\rho r\sin\frac{\rho}{r}}\left(y_i\omega_j\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)-y_j\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)\right)$$

$$=\frac{1-\cos\frac{\rho}{r}}{\rho r\sin\frac{\rho}{r}}\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}(y_i\delta_{jk}-y_j\delta_{ik})\right),$$

故

$$\sum_k y_k\omega_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial y_k}\right)=0.$$

从而欲证的事实成立，即 $\{E_1, E_2\}$ 沿着过南极 S 的测地线平行．现按下列定义的式子：

$$H_{ij}=\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\quad H_{ikl}=\omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right),$$

求得

$$H_{ij}=\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\delta_{ij}+\left(1-\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)x_ix_j,$$

$$H_{ikl}=\frac{1-\cos\frac{\rho}{r}}{\rho r\sin\frac{\rho}{r}}(y_kH_{li}-y_lH_{ki})$$

$$=\frac{1-\cos\frac{\rho}{r}}{\rho}(x_k\delta_{li}-x_l\delta_{ki}).$$

其中 $x_i=\dfrac{y_i}{\rho}$. 由于矩阵

$$W=\begin{pmatrix}x_1x_1 & x_1x_2\\ x_2x_1 & x_2x_2\end{pmatrix}$$

有特征向量(x_1, x_2)与$(x_2, -x_1)$, 对应的特征值为 1 与 0, 所以

$$\det(\lambda I-W)=\lambda(\lambda-1),$$

其中 I 是单位矩阵, 于是

$$\begin{aligned}\sqrt{G}&=\det\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{21} & H_{22}\end{pmatrix}\\ &=\det\left(\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}I+\left(1-\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}\right)W\right)\\ &=\frac{\sin\frac{\rho}{r}}{\frac{\rho}{r}}.\end{aligned}$$

最后通过直接验证, 得知(H_{ij})的逆矩阵(H^{ij})中元素如下:

$$H^{ij}=\frac{\frac{\rho}{r}}{\sin\frac{\rho}{r}}\delta_{ij}+\left(1-\frac{\frac{\rho}{r}}{\sin\frac{\rho}{r}}\right)x_ix_j.$$

(V) 计算 $\Delta_0\rho$ 和 Δ_0

首先有

$$\begin{aligned}\Delta_0\rho&=\frac{1}{\rho}(n-1+\hat{d}\log\sqrt{G})\\ &=\frac{1}{\rho}\left(n-1+\hat{d}\log\sin\frac{\rho}{r}-\hat{d}\log\frac{\rho}{r}\right)\\ &=\frac{1}{\rho}\left(n-2+\frac{\rho}{r}\operatorname{ctg}\frac{\rho}{r}\right),\end{aligned}$$

接着按照定义1.5.2求

$$\varDelta_0\colon \Gamma(\Lambda^*(M))\to\Gamma(\Lambda^*(M)),$$

其中 $M=S^2(r)$. 由

$$H_{ij}=\omega_i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right),\quad H_{ikl}=\omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

可求出

$$E_i=\sum_j H^{ji}\frac{\partial}{\partial y_j},$$

$$dy_i=\sum_j H^{ij}\omega_j,$$

$$\omega_{kl}=\sum_i H_{ikl}\,dy_i=\sum_{i,j} H_{ikl}H^{ij}\omega_j,$$

$$\nabla_{E_i}E_j=\sum_{\alpha,\beta,s} H^{\alpha i}H_{\alpha\beta j}H^{\beta s}\frac{\partial}{\partial y_s}.$$

故用本章§1.6末尾的记号, 有

$$\begin{aligned}\varDelta_0&=\sum_i D(E_i,\ E_i)=\sum_i(D_{E_i}D_{E_i}-D_{\nabla_{E_i}E_i})\\&=\sum_i\Big(E_i^\sigma+\sum_{k,l}\omega_{kl}(E_i)\omega_k\wedge i(E_l)\Big)\\&\quad\times\Big(E_i^\sigma+\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha\beta}(E_i)\omega_\alpha\wedge i(E_\beta)\Big)\\&\quad-\sum_i\Big((\nabla_{E_i}E_i)^\sigma+\sum_{k,l}\omega_{kl}(\nabla_{E_i}E_i)\omega_k\wedge i(E_l)\Big).\end{aligned}$$

以下采用"求和约定", 即表达式中重复的指标表示对此指标求和, 于是

$$\begin{aligned}\varDelta_0=&\left(H^{ji}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^\sigma+H^{si}H_{skl}\omega_k\wedge i(E_l)\right)\\&\times\left(H^{pi}\left(\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^\sigma+H^{qi}H_{q\alpha\beta}\omega_\alpha\wedge i(E_\beta)\right)\\&-\left(H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)^\sigma+H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}H_{jkl}\omega_k\wedge i(E_l)\right).\end{aligned}$$

令

$$f=\frac{\dfrac{\rho}{r}}{\sin\dfrac{\rho}{r}},\quad g=\frac{1-\cos\dfrac{\rho}{r}}{\rho},$$

那么

$$H^{ts}H^{js}=(f\delta_{ts}+(1-f)x_tx_s)(f\delta_{js}+(1-f)x_jx_s)$$
$$=f^2\delta_{tj}+(1-f^2)x_tx_j,$$
$$H^{st}H_{s\alpha\beta}=(f\delta_{st}+(1-f)x_sx_t)H_{s\alpha\beta}=fH_{t\alpha\beta}$$
$$=fg(x_\alpha\delta_{t\beta}-x_\beta\delta_{t\alpha}),$$
$$H^{tj}H^{sj}H_{s\alpha\beta}=H^{tj}fH_{j\alpha\beta}=f^2H_{t\alpha\beta}=f^2g(x_\alpha\delta_{t\beta}-x_\beta\delta_{t\alpha}),$$
$$H^{\alpha t}H^{\beta j}H_{\alpha\beta t}=H^{\beta j}(fH_{t\beta t})$$
$$=fg(f\delta_{\beta j}+(1-f)x_\beta x_j)(x_\beta\delta_{tt}-x_t\delta_{\beta t})$$
$$=fgx_j.$$

由本章§1.6末尾关于 X^σ 的定义可知：

$$X^\sigma(\omega_a\wedge)=(\omega_a\wedge)X^\sigma,$$
$$X^\sigma i(E_a)=i(E_a)X^\sigma.$$

在不会引起混淆的情况下，把 X^σ 记为 X. 于是

$$\Delta_0=H^{tm}\frac{\partial}{\partial y_t}H^{jm}\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{1}{4}H^{st}H_{skl}H^{jt}$$
$$\times\frac{\partial}{\partial y_j}(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)$$
$$+\frac{1}{4}H^{jt}\frac{\partial}{\partial y_j}H^{qt}H_{q\alpha\beta}(E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)$$
$$+\frac{1}{16}H^{st}H_{skl}H^{qt}H_{q\alpha\beta}(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)$$
$$\times(E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)$$
$$-H^{\alpha t}H^{\beta j}H_{\alpha\beta t}\frac{\partial}{\partial y_j}$$
$$-\frac{1}{4}H^{\alpha t}H^{\beta j}H_{\alpha\beta t}H_{jkl}(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)$$
$$=f^2\frac{\partial}{\partial y_t}\frac{\partial}{\partial y_t}+(1-f^2)x_tx_j\frac{\partial}{\partial y_t}\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{(1-f)f}{\rho}x_j\frac{\partial}{\partial y_j}$$

$$+\frac{2}{4}f^2g(x_k\delta_{jl}-x_l\delta_{jk})\frac{\partial}{\partial y_j}(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)$$

$$+\frac{1}{4}H^{jt}\Big[\frac{\partial}{\partial y_j}(H^{\alpha t}H_{q\alpha\beta})\Big](E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)$$

$$+\frac{1}{16}f^2g^2(x_k\delta_{il}-x_l\delta_{ik})(x_\alpha\delta_{i\beta}-x_\beta\delta_{i\alpha})$$

$$\times(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)(E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)$$

$$-fgx_j\frac{\partial}{\partial y_j}.$$

容易验证
$$H^{jt}\Big[\frac{\partial}{\partial y_j}(H^{\alpha t}H_{q\alpha\beta})\Big]=0,$$

$$(x_k\delta_{jl}-x_l\delta_{jk})(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)$$
$$=2(x_kE_k^+E_j^+-x_kE_k^-E_j^--2x_j)$$
$$=2\Big(\frac{\hat{d}^+}{\rho}E_j^+-\frac{\hat{d}^-}{\rho}E_j^--2x_j\Big),$$

$$\Big(\frac{\hat{d}^+}{\rho}E_j^+-\frac{\hat{d}^-}{\rho}E_j^--2x_j\Big)\Big(\frac{\hat{d}^+}{\rho}E_j^+-\frac{\hat{d}^-}{\rho}E_j^--2x_j\Big)$$
$$=\Big(\frac{\hat{d}^+}{\rho}E_j^+-\frac{\hat{d}^-}{\rho}E_j^-\Big)^2=2\,\frac{\hat{d}^+}{\rho}\cdot\frac{\hat{d}^-}{\rho}\cdot E_j^+\cdot E_j^-.$$

其中
$$\frac{\hat{d}^+}{\rho}=x_kE_k^+,\quad \frac{\hat{d}^-}{\rho}=x_kE_k^-.$$

从而

$$\Delta_0=[f^2\delta_{ij}+(1-f^2)x_ix_j]\frac{\partial}{\partial y_i}\cdot\frac{\partial}{\partial y_j}$$
$$+f^2g\Big(\frac{\hat{d}^+}{\rho}E_j^+-\frac{\hat{d}^-}{\rho}E_j^-\Big)\frac{\partial}{\partial y_j}$$
$$+\Big[\frac{f(1-f)}{\rho}-2f^2g-fg\Big]\frac{\hat{d}}{\rho}$$
$$+\frac{1}{2}f^2g^2\,\frac{\hat{d}^+}{\rho}\,\frac{\hat{d}^-}{\rho}E_j^+E_j^-,$$

其中

$$f=\frac{\dfrac{\rho}{r}}{\sin\dfrac{\rho}{r}},\quad g=\frac{1-\cos\dfrac{\rho}{r}}{\rho}.$$

第 2 章

椭圆方程与热方程的一般理论

上一章我们引进了算子 $d+\delta$. 它限制在不同的空间中给出 de Rham-Hodge 算子、Signature 算子等. Weitzenböck 公式揭示了 $(d+\delta)^2$ 与 Laplace-Beltrami 算子 Δ_0 的密切关系, 其中 Laplace-Beltrami 算子的定义见第 1 章的定义 1.5.2. 为以后陈述方便计, 我们把下列形状的算子:

$$\Delta \equiv -(\Delta_0+F)$$

称为 Laplace 型算子, 其中 F 是一个 $\mathscr{F}(M)$ 线性的算子(或称映射). 由这个约定可知, Weitzenböck 公式断言: $(d+\delta)^2$ 是 Laplace 型算子.

这一章我们建立 Laplace 型算子 Δ 的一般理论, 即求解下列椭圆方程(或 Laplace 方程):

$$\Delta\varphi=0 \quad 或 \quad \Delta\varphi=f$$

的理论, 其中 f 是已知的"函数", φ 是未知的"函数". 与分析学中的椭圆方程论相比, 这里的情形略有不同, 表现在求解的 φ 是定义在一个紧致无边流形 M 上的. 这时的求解理论有一个完美的形式, 那就是 Hodge 定理.

另外, 我们建立相应于 Δ 的热方程 Cauchy 问题的求解理论(即本章中的定理 2.3.1 和定理 2.3.2). 在这个理论中出现一个重要的概念——基本解概念, 不但能用于热方程的 Cauchy 问题的求解, 而且还能用于 Atiyah-Singer 指标定理的证明.

椭圆方程及相应的热方程的理论对我们来说都是需要的, 但我们极不愿意在一本书中分别独立地建立这两套理论, 所以文献

[14]令我们高兴，在其中作者告诉人们如何从热方程的Cauchy问题求解理论推出Hodge定理(即相应的椭圆方程的求解理论).在本章中我们就是按照文献[14]中指出的思路来讲述的. 遗憾的是，截至目前为止，我们还没有发现一本几何学教材把热方程的Cauchy问题的求解理论讲完全的. 我们勉为其难地从文献[7]中找到想法，又很幸运地从王光寅教授那里得到热情指教，总算写成了这一章的内容. 部分章节还经王教授过目. 在这里特向王光寅教授表示感谢.

§2.1 热方程的基本解观念与Levi算法

先看一个简单的例子. 考察下列的热方程的Cauchy问题:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f(t,x), & \forall t>0;\ x\in\mathbf{R};\\ \lim\limits_{t\to 0^+}u(t,x)=\varphi(x).\end{cases}$$

其中 u、f、φ 皆是实数值函数. 众所周知：这个问题的解是:

$$u(t,x)=\int_{\mathbf{R}}G(t,x,y)\varphi(y)dy+\int_0^t d\tau\int_{\mathbf{R}}G(t-\tau,x,y)f(\tau,y)dy.$$

其中

$$G(s,x,y)=\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}}.$$

在上述解的表达式中，$G(s,x,y)$是一个关键的函数，知道了它，便能写出Cauchy问题的解来. 易见它满足下列条件:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right)G(t,x,y)=0, & \forall t>0;\\ \lim\limits_{t\to 0^+}\displaystyle\int_{\mathbf{R}}G(t,x,y)\varphi(y)dy=\varphi(x).\end{cases}$$

其中 φ 是任意一个具有紧致支集的连续函数.

这个例子中的算子 $\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ 通常称为热算子，那是因为人们可用它来描写热传导现象. 如果把 t 仍表示时间，那么对算子

$\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 就说不出它的物理意义了. 可以把它叫作"反热算子", 因为它的下列 Cauchy 问题是适定的:

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,\ x)=f(t,\ x),\ \forall t<a,\ x\in\mathbf{R};\\ \lim\limits_{t\to a^-}u(t,\ x)=\varphi(x).\end{cases}$$

其中 a 是一个实数. 作了上述这一点观察之后, 对于 $\Delta=-(\Delta_0+F)$, 我们知道 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 是热算子, 而 $\frac{\partial}{\partial t}-\Delta$ 是反热算子. 在上面的例子中函数 $G(t,\ x,\ y)$ 的极端重要性使人们设想对于一般的热算子是不是也有一个类似于 $G(t,\ x,\ y)$ 的"函数"? 这种设想诱发了下面的定义:

定义 2.1.1　设 M 是黎曼流形; $\pi: E\to M$ 是一个向量丛, 并且其上带有一个联络 D. 令

$$\Delta_0:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

是由 D 及 M 上的 Levi-Civita 联络导出的 Laplace-Beltrami 算子. 又设 $F:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是一个 $\mathscr{F}(M)$ 线性映射. 令

$$\Delta=-(\Delta_0+F).$$

我们把满足下列条件(i)、(ii)、(iii)的 $G(t,\ x,\ y)$: $E_y\to E_x$ (其中 x、$y\in M$, $t>0$, $E_x=\pi^{-1}(x)$)称为 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的基本解.

(i) $G(t,\ x,\ y)$: $E_y\to E_x$ 是向量空间的同态(即线性映射), 它关于变量 $(t,\ x,\ y)$ 是连续的;

(ii) 对于任意固定的 $v\in E_y$, 令

$$\theta(t,\ x)=G(t,\ x,\ y)v,\ \forall t>0.$$

则 θ 关于 t、x 分别是一次、二次连续可微的, 并且满足方程 $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)\theta=0$.

(iii) 如果 φ 是丛 E 的连续截面, 则

$$\lim_{t\to 0}\int_M G(t,\ x,\ y)\varphi(y)dy=\varphi(x),$$

其中 dy 是黎曼度量导出的体积测度.

注 2.1.2 $G(t, x, y)$是带参数(t, x, y)的线性映射族, 参数$(t, x, y)\in(0, \infty)\times M\times M$. 这个族可以解释为空间$(0, \infty)\times M\times M$ 上某个向量丛的截面, 这个向量丛的纤维是 $\mathrm{Hom}(E_y, E_x)$. 因此这个线性映射族正是第 1 章 §1.4 中介绍的广义张量(见注 1.4.10). 对于在下面 §2.2 中讲到的 $H(t, x, y)$、$U(t, x, \alpha)$、$W(t, x, \alpha)$等等皆作类似的解释. 这样的解释是很重要的, 因为对于一个向量丛的截面, 我们论述它的可微性就确切了.

注 2.1.3 基本解 $G(t, x, y)$还有许多其他优美的性质, 例如它有更好的可微性, 以及用它可以解热方程的 Cauchy 问题等等. 可是为什么这些性质不列入定义 2.1.1 中呢? 这是因为有了上述定义中的(i)、(ii)、(iii), 便足以保证 $G(t, x, y)$的唯一性了(见后面的定理 4.3.3).

关于基本解的定义, 自然会产生两个问题: (1) 能不能用一个明确的表达式把基本解写出来? 这个问题很容易回答: 类似于 $\frac{1}{\sqrt{4\pi s}}e^{-\frac{(x-y)^2}{4s}}$ 这样简明的表达式是没有的. (2) 基本解是不是存在唯一? 下面我们逐步解答这一个问题.

虽然不能用一个明确的表达式来写出基本解, 但我们可以试造一个级数, 使它收敛到基本解. 比如要解一个方程式 $F(x)=0$, 我们可以用迭代法: 求出第 n 个近似解 x_n 之后, 令 $x_{n+1}=x_n+h$, 寻找 $F(x_n+h)=0$ 的一个近似解 h. 这就给出了一个从 x_n 求出 $x_{n+1}(=x_n+h)$的方法. 重复使用此法, 在不少情形下, 序列$\{x_n\}$就收敛到方程 $F(x)=0$ 的解. 类此, 在寻找基本解 $G(t, x, y)$时, 我们也用迭代法. 假若已求出 $G_m(t, x, y)$, 它满足

$$\lim_{t\to 0}\int_M G_m(t, x, y)\varphi(y)dy=\varphi(x), \ \forall\varphi.$$

令
$$G_{m+1}(t, x, y)=G_m(t, x, y)+h(t, x, y).$$

考虑下列方程:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)(G_m+h)=0,\\ \lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_M (G_m+h)(t, x, y)\varphi(y)dy=\varphi(x),\ \forall\varphi,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)h(t, x, y)=-\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G(t, x, y),\\ \lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_M h(t, x, y)\varphi(y)dy=0,\ \forall\varphi.\end{cases}$$

由于我们心目中的 $G(t, x, y)$ 是用来解热方程的 Cauchy 问题的，因此将上述关于 h 的方程式中第二式理解为

$$\lim_{t\to 0} h(t, x, y)=0$$

之后，便应该像 § 2.1 开头的例子那样，有解

$$h(t, x, y)=\int_0^t d\tau\int_M G(t-\tau, x, y)\times\left[-\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+\Delta_z\right)G_m(\tau, z, y)\right]dz.$$

为了迭代法的需要，我们近似地取 h 为

$$h(t, x, y)=\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)\times\left[-\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+\Delta_z\right)G_m(\tau, z, y)\right]dz.$$

这样一来，迭代格式就是

$$G_{m+1}(t, x, y)=G_m(t, x, y)+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)\times\left[-\left(\frac{\partial}{\partial \tau}+\Delta_z\right)G_m(\tau, z, y)\right]dz.$$

下面我们将此迭代格式作一变形. 令

$$K_m(t, x, y)=(-1)^m\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G_m(t, x, y).$$

则有下列的"形式"计算:

$$K_{m+1}(t, x, y)=(-1)^{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G_m(t, x, y)$$

$$=(-1)^{m+1}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)\Big\{ G_m(t, x, y)$$

$$+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)[(-1)^{m+1}K_m(\tau, z, y)]dz$$

$$=-K_m(t, x, y)+\left[\int_M G_0(t-\tau, x, z)K_m(\tau, z, y)\right]_{\tau=t}$$

$$+\int_0^t d\tau\int_M K_0(t-\tau, x, z)K_0(\tau, z, y)dz$$

$$=\int_0^t d\tau\int_M K_0(t-\tau, x, z)K_m(\tau, z, y)dz,$$

$$G(t, x, y)=G_0+\sum_{m=0}^{\infty}(G_{m+1}-G_m)$$

$$=G_0(t, x, y)+\sum_{m=0}^{\infty}\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)$$

$$\times[(-1)^{m+1}K_m(\tau, z, y)]dz$$

$$=G_0(t, x, y)+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)$$

$$\times\left[\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}K_m(\tau, z, y)\right]d\tau.$$

这个形式计算是不严格的．但形式计算的结果却可能很有价值，至少它引出了下列的定义：

定义 2.1.4 设给定 $G_0(t, x, y)$，则称按下列公式算出 $G(t, x, y)$ 的算法为 Levi 算法：

$$K_0(t, x, y)=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G_0(t, x, y),$$

$$K_{m+1}(t, x, y)=\int_0^t d\tau\int_M K_0(t-\tau, x, y)K_m(\tau, z, y)$$

$$(m=0, 1, 2, \cdots),$$

$$\bar{K}(t, x, y)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}K_m(t, x, y)$$

$$G(t, x, y)=G_0(t, x, y)$$

$$+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)\bar{K}(\tau, z, y)dz,$$

有时把 G 记为 $\mathrm{Levi}(G_0)$．

以后我们要讨论：当 G_0 取得合适时，上述 Levi 算法是合理的(即算法中的一切极限皆存在)，并且算出的 $G(t, x, y)$ 就是

$\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的基本解.

§2.2 基本解的存在性

本节将引进初解的概念，这是为取作 Levi 算法中的 G_0 而设的，以保证 Levi 算法的合理性及基本解的存在性.

定义 2.2.1 设 M、E、Δ 如同定义 2.1.1，我们把满足下列条件(i)～(iv)的 $H(t, x, y): E_y\to E_x$(其中 $x, y\in M$, $t>0$)称为热算子 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的 k 级初解：

(i) $H(t, x, y): E_y\to E_x$ 是线性映射，并且关于自变量(t, x, y)是 C^∞ 的，此时记

$$H\in C^\infty((0, \infty)\times M\times M).$$

(ii) $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)H(t, x, y)$可以连续扩张到$[0, \infty)\times M\times M$ 上使得扩张后的截面(定义在$[0, \infty)\times M\times M$ 上的广义张量场)是 k 次连续可微的，即

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)H(t, x, y)\in C^k([0, \infty)\times M\times M),$$

其中

$C^k([0, \infty)\times M\times M)=\{f\in C^k((0, \infty)\times M\times M)\mid \forall l<k\ f$ 的 l 次导数可连续扩张到$[0, \infty)\times M\times M$ 上$\}$.

(iii) 设 N 是微分流形，f 是定义在 $M\times M$ 上的广义张量场，使得

$$f(x, \alpha)\in E_x,\ \forall(x, \alpha)\in M\times N, \text{并且} f\in C^0(M\times N).$$

令
$$U(t, x, \alpha)=\begin{cases}\int_M H(t, x, y)f(y, \alpha)dy, & \text{当 } t>0;\\ f(x, \alpha), & \text{当 } t=0.\end{cases}$$

则
$$U(t, x, \alpha)\in C^0([0, \infty)\times M\times N).$$

(iv) 设 $g(t, x, \alpha)\in E_x$ 是$[0, \infty)\times M\times N$ 上的广义张量

场，如果 $g\in C^l([0,\infty)\times M\times N)$，$0\leqslant l\leqslant 2k$，令

$$W(t,x,\alpha)=\int_0^t d\tau\int_M H(t-\tau,x,y)g(\tau,y,\alpha)dy,$$

则
$$W\in C^{\left[\frac{l}{2}\right]}([0,\infty)\times M\times N),$$

其中 $\left[\frac{l}{2}\right]$ 表示数 $\frac{l}{2}$ 的整数部分. 此外对于 M 上任意向量场 X_1，$\cdots$，X_s，$s\leqslant\frac{l}{2}$，有

$$\nabla_{X_1}\cdots\nabla_{X_s}W(t,x,\alpha)=\int_0^t d\tau\int_M \nabla_{X_1}\cdots\nabla_{X_s}\times[H(t-\tau,x,y)g(\tau,y,\alpha)]dy.$$

当 $1\leqslant\frac{l}{2}$ 时，还有

$$\frac{\partial}{\partial t}W(t,x,\alpha)=g(t,x,\alpha)+\int_0^t d\tau\int_M \frac{\partial}{\partial t}H(t-\tau,x,y)g(\tau,y,\alpha)dy.$$

注 2.2.2 $H(t,x,y)$ 在 $t=0$，$x=y$ 处是有奇性的，所以 (iv) 中定义 $W(t,x,\alpha)$ 的积分式应确切理解为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}d\tau\int_M H(t-\tau,x,y)g(\tau,y,\alpha)dy.$$

即对于 $t>0$，上式是关于 τ 的一个瑕积分. 一般来说瑕积分的可微性要个别对待，所以 (iv) 能断言的关系式

$$W\in C^{\left[\frac{l}{2}\right]}((0,\infty)\times M\times N)$$

不是平凡的，更不用说

$$W\in C^{\left[\frac{l}{2}\right]}([0,\infty)\times M\times N)$$

了.

注 2.2.3 初解的概念是为了提供合适的 G_0 这一目的而设立的. 它们能保证 Levi 算法的合理性，能使算出的 G 就是基本解. 从这一目的来说，基本解本身自然是绝好的 G_0 的候选者，因为它可使 Levi 算法中的 $K_0=K_1=\cdots=\overline{K}=0$. 可是当比较定义 2.1.1 和定义 2.2.1 时，会发现除去第 (ii) 条件外，对初解的要求

反而更苛刻，以致基本解本身能否作为初解都成问题了．其实用不着对此情况感到奇怪．初解在某些方面比基本解更好，是有可能的．再说，在定义基本解时，我们尽量少地列出它的性质，只要能保证唯一性就行了．而初解本来就不是唯一的，人们在保证它们存在的前提下，越多地列举它们的性质，则使用起来就越方便，并且能转移更多更好的性质给基本解．

注 2.2.4 初解是介于基本解与以后要介绍的拟基本解(Parametrix)之间的一个概念．这个概念是否有存在的必要，在此说不清楚．由于在几何文献的有关推导论证中，初解的性质(iv)常被忽略，而在分析学中却被十分重视，甚至把(iv)中的 $W(t, x, \alpha)$ 称之为位势积分，因此，现在我们有意识地写下这个初解的概念是为了引起注意与讨论．

引理 2.2.5 设 $G_0(t, x, y)$ 是 k 级初解，则 Levi 算法是合理的，即在算法中所遇到的一切极限皆存在，并且

$$\widetilde{K}(t, x, y)\in C^k([0, \infty)\times M\times M).$$

证明 因为

$$K_0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G_0\in C^k([0, \infty)\times M\times M),$$

所以对固定的 $T>0$，存在常数 $c>0$，使得

$$|K_0(t, x, y)|\leqslant c,\ \forall t\in[0, T],$$

于是对于 $t\leqslant T$，有

$$\begin{aligned}|K_1(t, x, y)|&\leqslant\int_0^t d\tau\int_M |K_0(t-\tau, x, z)|\cdot|K_0(\tau, z, y)|dz\\&\leqslant\int_0^t d\tau\cdot c^2v=c^2vt,\end{aligned}$$

其中 v 是 M 的体积．接着又有

$$\begin{aligned}|K_2(t, x, y)|&\leqslant\int_0^t d\tau\int_M |K_0(t-\tau, x, z)|\cdot|K_1(\tau, z, y)|dz\\&\leqslant\int_0^t c^3v^2\tau d\tau=c^3v^2\frac{t^2}{2}.\end{aligned}$$

归纳得

$$|K_m(t, x, y)|\leqslant C^{m+1}v^m\frac{t^m}{m!}.$$

于是
$$\sum_{m=0}^{\infty}|K_m(t, x, y)|\leqslant\sum_{m=0}^{\infty}c\frac{(cvt)^m}{m!}=ce^{cvt},$$
从而在$[0, T]\times M\times M$上$\sum(-1)^{m+1}K_m$绝对一致收敛．由此可知
$$\widetilde{K}(t, x, y)\in C^0([0, \infty)\times M\times M).$$
如果记
$$(A*B)(t, x, y)=\int_0^t d\tau\int_M A(t-\tau, x, z)B(\tau, z, y)dz,$$
则有
$$\widetilde{K}=-K_0+K_0*K_0-K_0*(\widetilde{K}*K_0).$$
注意到
$$K_0\in C^k([0, \infty)\times M\times M),$$
便有
$$\widetilde{K}\in C^k([0, \infty)\times M\times M).$$
引理证毕．▌

定理 2.2.6(一个正则基本解的存在性)　设 G_0 是 k 级初解，$k\geqslant 4$，则由 Levi 算法得到的 G 就是 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的基本解，并且
$$G(t, x, y)\in C^{\left[\frac{k}{2}\right]}((0, \infty)\times M\times M).$$

证明　由引理 2.2.5 和定义 2.2.1(iv)知
$$\widetilde{K}\in C^k([0, \infty)\times M\times M)$$
和
$$G_0*\widetilde{K}\in C^{\left[\frac{k}{2}\right]}((0, \infty)\times M\times M),$$
所以
$$G=G_0+G_0*\widetilde{K}\in C^{\left[\frac{k}{2}\right]}((0, \infty)\times M\times M).$$
对于 $v\in E_y$，由定义 2.2.1(iv)，有
$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)(G(t, x, y)v)\\&=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G_0(t, x, y)v+\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)(G_0*\widetilde{K})(t, x, y)v\\&=K_0(t, x, y)v+[\widetilde{K}(t, x, y)v+(K_0*\widetilde{K})(t, x, y)v]\\&=\left[K_0+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}K_0^{*m}+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}K_0^{*(m+1)}\right]v\\&=0,\end{aligned}$$
其中
$$K_0^{*m}=\underbrace{K_0*\cdots*K_0}_{m\text{个}}.$$

又

$$\int_M G(t, x, y)\varphi(y)dy = \int_M G_0(t, x, y)\varphi(y)dy$$
$$+\int_M (G_0 * \overline{K})(t, x, y)\varphi(y)dy$$
$$= \int_M G_0(t, x, y)\varphi(y)dy$$
$$+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)U(\tau, z)dz,$$

其中
$$U(\tau, z) = \int_M \overline{K}(\tau, z, y)\varphi(y)dy.$$

由定义 2.2.1(iii)和(iv)得

$$\lim_{t\to 0}\int_M G_0(t, x, y)\varphi(y)dy = \varphi(x),$$
$$\lim_{t\to 0}\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, y)U(\tau, y)dy = 0,$$

从而
$$\lim_{t\to 0}\int_M G(t, x, y)\varphi(y)dy = \varphi(x).$$

定理证毕. ∎

§ 2.3 热方程的 Cauchy 问题

对于热算子$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)$来说, 最重要的事是如何求解 Cauchy 问题. 引入基本解的概念的目的正在于此. 对于 Cauchy 问题来说, 解的存在性最为重要, 因为解的唯一性可以作为它的推论能轻易地导出(见定理 2.3.2 的证明).

定理 2.3.1 (**Cauchy 问题解的存在性与正则性**) 设 G_0 是 k 级初解, $k\geq 4$. 令

$$G = \mathrm{Levi}(G_0).$$

对于任意连续的 $\varphi(x)$和任意的 $f(t, x)\in C^l([0, \infty)\times M)$, $l\geq 4$, 热方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u(t, x)=f(t, x), \ \forall t>0;\\ \lim\limits_{t\to 0^+}u(t, x)=\varphi(x),\end{cases}$$

有下列解:

$$\bar{u}(t, x)=\int_M G(t, x, y)\varphi(y)dy$$
$$+\int_0^t d\tau\int_M G(t-\tau, x, y)f(\tau, y)dy,$$

并且 $\bar{u}(t, x)\in C^s((0, \infty)\times M)\cap C^0([0, \infty)\times M)$,

其中
$$s=\min\left(\left[\frac{k}{2}\right], \left[\frac{l}{2}\right]\right).$$

证明 由于

$$G(t, x, y)=G_0(t, x, y)+(G_0*\overline{K})(t, x, y)$$
$$=G_0(t, x, y)+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, z)\overline{K}(\tau, z, y)dz,$$

$$((G_0*\overline{K})*f)(t, x)$$
$$=\int_0^t d\tau\int_M (G_0*\overline{K})(t-\tau, x, y)f(\tau, y)dy$$
$$=\int_0^t d\tau\int_M dy\int_0^{t-\tau}ds\int_M G_0(t-\tau-s, x, z)$$
$$\times\overline{K}(s, z, y)f(\tau, y)dz$$
$$=\int_0^t d\mu\int_M dz\int_0^{\mu}d\tau\int_M G_0(t-\mu, x, z)$$
$$\times\overline{K}(\mu-\tau, z, y)f(\tau, y)dy,$$

故若令 $P(t, x)=\int_M\overline{K}(t, x, y)\varphi(y)dy\in C^k([0, \infty)\times M)$,

$$Q(t, x)=\int_0^t d\tau\int_M\overline{K}(t-\tau, x, y)f(\tau, y)dy$$
$$\in C^k([0, \infty)\times M),$$

则有

$$\bar{u}(t, x)=\int_M G_0(t, x, y)\varphi(y)dy$$
$$+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, y)P(\tau, y)dy$$

$$+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, y)f(\tau, y)dy$$

$$+\int_0^t d\tau\int_M G_0(t-\tau, x, y)Q(\tau, y)dy,$$

因此由定义 2.2.1 知

$$\bar{u}(t, x)\in C^2((0, \infty)\times M)\cap C^0([0, \infty)\times M),$$

并且

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)\bar{u}(t, x)=\int_M\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G_0(t, x, y)\varphi(y)dy$$

$$+(P(t, x)+f(t, x)+Q(t, x))$$

$$+\int_0^t d\tau\int_M\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)G_0(t-\tau, x, y)(P(\tau, y)+f(\tau, y)$$

$$+Q(\tau, y))dy$$

$$=\int_M K_0(t, x, y)\varphi(y)dy+(P(t, x)+f(t, x)+Q(t, x))$$

$$+\int_0^t d\tau\int_M K_0(t-\tau, x, y)(P(\tau, y)$$

$$+f(\tau, y)+Q(\tau, y))dy.$$

将 $P(t, x)$、$Q(t, x)$ 的定义代入上式, 立即可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)\bar{u}(t, x)=0.$$

定理证毕. ■

定理 2.3.2(Cauchy 问题解的唯一性) 如果

$$u(t, x)\in C^2((0, \infty)\times M)\cap C^0([0, \infty)\times M),$$

并且满足

$$\begin{cases}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u(t, x)=0,\\ u(0, x)=0,\end{cases}$$

则

$$u(t, x)\equiv 0.$$

证明 只须证明: 对于任意的 C^∞ 的 $\varphi\in\Gamma(E)$,

$$\int_M\langle\varphi(x), u(t, x)\rangle dx=0, \ \forall t>0.$$

由定理 2.3.1, 存在 $\Phi(t, x)$, 使得

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)\Phi(t,x)=0,\ \forall t>0,\\ \Phi(0,x)=\varphi(x).\end{cases}$$

于是对于 $0<\tau<t$，有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial\tau}\int_M\langle\Phi(t-\tau,x),u(\tau,x)\rangle dx\\ &=\int_M\left\langle\frac{\partial}{\partial\tau}\Phi(t-\tau,x),u(\tau,x)\right\rangle dx\\ &\quad+\int_M\left\langle\Phi(t-\tau,x),\ \frac{\partial}{\partial\tau}u(t,x)\right\rangle dx\\ &=\int_M\langle\Delta_x\Phi(t-\tau,x),u(\tau,x)\rangle dx\\ &\quad+\int_M\langle\Phi(t-\tau,x),-\Delta_x u(\tau,x)\rangle dx\\ &=\int_M\langle\Delta_x\Phi(t-\tau,x),u(\tau,x)\rangle dx\\ &\quad+\int_M\langle\Delta_x\Phi(t-\tau,x),-u(\tau,x)\rangle dx=0.\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}\int_M\langle\varphi(x),u(t,x)\rangle dx&=\lim_{\tau\to t^-}\int_M\langle\Phi(t-\tau,x),u(\tau,x)\rangle dx\\ &=\lim_{\tau\to0^+}\int_M\langle\Phi(t-\tau,x),u(\tau,x)\rangle dx\\ &=0.\end{aligned}$$

于是定理得证. ▌

注 2.3.3 当 $u(t,\cdot)\in\overline{\Gamma(E)}$, $\forall t\geqslant0$, 并且 $v(t)\equiv u(t,\cdot)$ 关于变量 t 是连续可微的, 则上述唯一性定理仍然成立, 其中 $\overline{\Gamma(E)}$ 是记 $\Gamma(E)$ 在内积度量下的完备化空间.

注 2.3.4 对定理 2.3.1 的证明稍作修改, 可证得: 当 φ 的连续条件改为 $\varphi\in\overline{\Gamma(E)}$ 时, 定理依然成立.

§2.4 椭圆方程的一般理论——Hodge 定理

设 E 是 M 上的向量丛. 令 $\Gamma(E)$ 是 E 的所有光滑截面构

成的集合．又设向量丛 E 上有内积(即 E 的每一个纤维皆是内积空间)．故 $\Gamma(E)$ 上有诱导内积(此时需假定 M 是黎曼流形．详情参阅第 1 章 § 1.6)．如果

$$\Delta: \Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

是 Laplace 型椭圆算子，我们考虑下列方程

$$\Delta^* u = f$$

的求解问题，其中 Δ^* 是 Δ 的伴随算子．对于什么样的 f，上述方程有解？解是不是唯一的？这个求解问题的彻底解决就是以后要证明的等式(空间 $\Gamma(E)$ 的正交分解等式)

$$\Gamma(E)=\mathrm{Ker}\Delta \dotplus \mathrm{Im}\,\Delta^*,$$

其中

$$\mathrm{Ker}\,\Delta=\{\varphi\in\Gamma(E)\mid \Delta\varphi=0\},$$

$$\mathrm{Im}\,\Delta^*=\Delta^*(\Gamma(E)),$$

且

$$\dim(\mathrm{Ker}\Delta)<\infty.$$

上述的等式就是著名的 Hodge *定理*．由 Hodge 定理即可知：

$$\text{方程 } \Delta^* u=f \text{ 有解} \Leftrightarrow f\in \mathrm{Im}\,\Delta^* \Leftrightarrow f\perp \ker\Delta,$$

并且在有解的情况下，解空间的维数等于

$$\dim(\mathrm{Ker}\,\Delta^*).$$

又由 Hodge 定理知：这个 $\dim(\mathrm{Ker}\Delta^*)$ 是有限数．由此可见 Hodge 定理实际上是方程求解的理论，从而一定是深刻而难证的．但是如果不仔细地看一下等式

$$\Gamma(E)=\mathrm{Ker}\,\Delta\dotplus\mathrm{Im}\,\Delta^*,$$

还可能以为这个等式没什么了不起．因为有一个很容易验证的下列等式

$$(\mathrm{Im}\,\Delta^*)^\perp=\mathrm{Ker}\,\Delta,$$

加上一个有限维内积空间中正交分解的直观，下面的等式似乎是显然的：

$$\Gamma(E)=\mathrm{Im}\,\Delta^*\dotplus(\mathrm{Im}\,\Delta^*)^\perp=\mathrm{Im}\,\Delta^*+\mathrm{Ker}\,\Delta.$$

但事实上却不是显然的，证明

$$\Gamma(E)=\mathrm{Im}\,\Delta^*\dotplus(\mathrm{Im}\,\Delta^*)^\perp$$

与证明

$$\Gamma(E)=\mathrm{Im}\,\Delta^*+\mathrm{Ker}\,\Delta$$

有同等程度的困难. 关于 Hodge 定理的全面剖析, 可参阅文献[20]和[21]. 在那里既有证明思路的透彻剖析, 又有有趣的史料. 在 Hodge 定理我们看到了"直觉的数学"与"严格的数学"之间的差别太大了.

在这一节里我们将采用不同寻常的方法证明 Hodge 定理. 这个方法就是文献[14]中描述的热方程方法. 遗憾的是, 他们的证明不完全, 缺乏关于 Cauchy 问题解的存在性的讨论, 所以没有流行.

给定向量丛 E 的连续截面 $\varphi(x)$, 考虑如下的方程:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u(t,x)=0, \ \forall t>0,\\ u(0,x)=\varphi(x).\end{cases}$$

现在我们假定热算子 $\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)$ 有 k 级初解, 其中 k 可以任意大(这个假定的证明见第4章§4.2). 于是由定理2.3.1和定理2.3.2, 上述方程有唯一解 $u(t,x)$, 并且

$$u(t,x)\in C^0([0,\infty)\times M)\cap C^\infty((0,\infty)\times M).$$

我们把 $u(t,x)$ 记为 $(T_t\varphi)(x)$. 为了便于处理, 自此以后, 我们假定 Δ 是自伴的.

引理 2.4.1(半群性质) T_t 具有下列性质:

(i) $T_0=1$, $T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_2}T_{t_1}=T_{t_1+t_2}$, $\forall t_1, t_2\geqslant 0$.

(ii) 对于任意的 $t\geqslant 0$, T_t 是自伴的.

(iii) 对于任意的 $t>0$, T_t 是紧算子, 即 T_t 将任何一个有界集映为紧致集.

证明 根据 Cauchy 问题解的唯一性(定理2.3.2), 易见(i)成立. 下面证(ii): 由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\langle T_t\varphi, T_\tau\psi\rangle&=\left\langle\frac{\partial}{\partial t}T_t\varphi, T_\tau\psi\right\rangle\\&=\langle-\Delta T_t\varphi, T_\tau\psi\rangle=\langle T_t\varphi, -\Delta T_\tau\psi\rangle\\&=\frac{\partial}{\partial\tau}\langle T_t\varphi, T_\tau\psi\rangle,\end{aligned}$$

故
$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\langle T_t\varphi,\ T_\tau\psi\rangle=0.$$
考虑参数变换
$$\begin{cases}u=t+\tau,\\ v=t-\tau,\end{cases}$$
易知
$$\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial u}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial \tau}\right),\\[2mm] \dfrac{\partial}{\partial v}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial}{\partial \tau}\right).\end{cases}$$
于是从
$$\frac{\partial}{\partial v}\langle T_t\varphi,\ T_\tau\psi\rangle=0$$
可推出
$$\langle T_t\varphi,\ T_\tau\psi\rangle=f(u)=f(t+\tau),$$
即有
$$\langle T_t\varphi,\ T_\tau\psi\rangle=f(t+\tau)=\langle T_\tau\varphi,\ T_t\psi\rangle.$$
特别地有
$$\langle T_t\varphi,\ \psi\rangle=\langle\varphi,\ T_t\psi\rangle.$$
这表明 T_t 是自伴的. 注意到
$$T_t\varphi=\int_M G(t,\ x,\ y)\varphi(y)dy,$$
以及
$$G(t,\ x,\ y)\in C^{\left[\frac{k}{2}\right]}((0,\ \infty)\times M\times M),$$
故当 $t>0$ 时, T_t 是紧算子. 引理证毕. ▌

定理 2.4.2(**展开定理**)　设 M 是黎曼流形; E 是 M 上具有度量及容许联络的向量丛; Δ_0: $\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是 Laplace-Beltrami 算子; F: $\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是 $\mathscr{F}(M)$ 线性映射, 并且设 $\Delta\equiv-(\Delta_0+F)$ 是自伴且正定的, 则

(i) 存在幺正截面集 $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\}\subset\Gamma(E)$. (在此提醒一句: 因 $\Gamma(E)$ 是 C^∞ 截面的集合, 故 φ_i 是 C^∞ 的. 此外"幺正"是指
$$\langle\!\langle\varphi_i,\ \varphi_j\rangle\!\rangle\equiv\int_M\langle\varphi_i(x),\ \varphi_j(x)\rangle dx=\delta_{ij}.\ )$$

(ii) 记内积空间 $\Gamma(E)$ 的完备化空间为 $\overline{\Gamma(E)}$, 那么 $\{\varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots\}$ 是 $\overline{\Gamma(E)}$ 中的完备集. 即对于任意的 $\varphi\in\overline{\Gamma(E)}$, 在 $\overline{\Gamma(E)}$ 中有下列等式:
$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\langle\!\langle\varphi,\ \varphi_i\rangle\!\rangle\varphi_i.$$

(iii) $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$满足

$$\Delta\varphi_i=\lambda_i\varphi_i, \quad T_t\varphi_i=e^{-t\lambda_i}\varphi_i.$$

并且

$$0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots; \quad \lim_{i\to\infty}\lambda_i=\infty$$

(以后简记为 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\to\infty$).

证明 对于任意固定的 $t>0$, T_t 是自伴的紧算子. 由著名的 Hilbert-Schmidt 定理(参阅文献[28]第235页)可知: 作为 $\overline{\Gamma(E)}$ 上的算子 T_t, 它的非零特征值 $\mu_i(t)$ 可以排列起来, 使得

$$|\mu_1(t)|^{-1}<|\mu_2(t)|^{-1}<|\mu_3(t)|^{-1}<\cdots\to\infty.$$

并且相应的特征空间

$$V_i(t)=\{\varphi\in\overline{\Gamma(E)}\,|\,T_t\varphi=\mu_i(t)\varphi\}$$

皆是有限维的, 且彼此正交. 从

$$T_{t_1}T_{t_2}=T_{t_2}T_{t_1}$$

得知, T_{t_1} 与 T_{t_2} 有公共的特征子空间, 因此存在一串有限维子空间 $V_1, V_2, \cdots$, 使得它们皆是 T_t 的非零特征空间($\forall t>0$). 现在考虑作用在有限维空间 V_i 上的算子半群$\{T_t\,|\,t\geqslant0\}$. 通过初等的论证可得: 存在实数 λ_i, 使得

$$T_t=e^{-\lambda_i t}: V_i\to V_i.$$

由定理2.3.1(确切讲, 应由注2.3.4)知: 对于任意的 $\varphi\in V_i$ 及 $t>0$, $T_t\varphi$ 是 C^∞ 的, 故 $\varphi=e^{\lambda_i t}T_t\varphi$ 也是 C^∞ 的, 并且从下列计算:

$$0=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)T_t\varphi=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)(e^{-\lambda_i t}\varphi)=(-\lambda_i\varphi+\Delta\varphi)e^{-\lambda_i t},$$

得

$$\Delta\varphi=\lambda_i\varphi.$$

因为 Δ 是正算子, 故 $\lambda_i\geqslant0$. 在每一个 V_i 中选取幺正标架后, 将所有幺正标架的标架向量排列起来取作为$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$. 此时即知定理中的(i)与(iii)成立. Hilbert-Schmid 定理还断言: 对于 $t>0$, $\varphi\in\overline{\Gamma(E)}$时, $T_t\varphi$ 可以按$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$展开. 现在因为有

$$\lim_{t\to0}T_t\varphi=\varphi,$$

故 φ 也可以按$\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$展开. 这便证得(ii). 定理证毕. ▌

定理 2.4.3(Hodge 定理) 设 M、E、Δ 的定义如同定理

2.4.2 中所述，则

（i）$\mathscr{H}\equiv\{\varphi\in\Gamma(E)\mid\Delta\varphi=0\}$是有限维向量空间.

（ii）对于任意的 $\varphi\in\Gamma(E)$，有下列唯一分解：

$$\varphi=\varphi_\alpha+\varphi_\beta,$$

其中 $\varphi_\alpha\in\mathscr{H}$, $\varphi_\beta\in\Delta(\Gamma(E))$.

证明　由于 $\mathscr{H}\perp\Delta(\Gamma(E))$，所以上述分解必是唯一的. 对于任意的 $\varphi\in\Gamma(E)$，令

$$\varphi_\alpha=\sum_{\lambda_i=0}\langle\!\langle\varphi,\ \varphi_i\rangle\!\rangle\varphi_i,$$

$$\varphi_\beta=\varphi-\varphi_\alpha.$$

易知
$$\sum_{\lambda_i>0}\frac{\langle\!\langle\varphi,\ \varphi_i\rangle\!\rangle}{\lambda_i}\varphi_i\in\overline{\Gamma(E)}.$$

令 $u(t,x)$是下列方程的解：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=\varphi-\varphi_\alpha;\\ u(0,\ \cdot)=\displaystyle\sum_{\lambda_i>0}\frac{\langle\!\langle\varphi,\ \varphi_i\rangle\!\rangle}{\lambda_i}\varphi_i.\end{cases}$$

由注 2.3.4 知

$$u(t,x)\in C^\infty((0,\infty)\times M).$$

又由简单验算可知

$$\bar{u}=\sum_{\lambda_i>0}\frac{\langle\!\langle\varphi,\ \varphi_i\rangle\!\rangle}{\lambda_i}\varphi_i$$

是上述热方程 Cauchy 问题的一个 $\mathscr{L}^2$ 解. 由热方程 Cauchy 问题解的唯一性即得

$$\bar{u}=u.$$

从 $\dfrac{\partial}{\partial t}\bar{u}=0$ 可推知：

$$\varphi-\varphi_\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)u=\frac{\partial}{\partial t}\bar{u}+\Delta u=\Delta u.$$

于是定理中(ii)得证. 至于(i)，可由定理 2.4.2(iii)直接导出. 定理证毕. ▌

在这一节最后的部分，我们将再一次使用定理 2.4.2（展开定理），以证明热方程基本解的唯一性（当然也可以用别的方法证此

唯一性).

定理 2.4.4(**基本解的唯一性**) 设 M、E、Δ 同前. 又设 $G(t, x, y)$ 是 $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_x\right)$ 的基本解(见定义 2.1.1), 则在 $\overline{\Gamma(E)}$ 中

$$G(t, x, y)=\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)\langle\varphi_i(y), \cdot\rangle,$$

从而可知基本解是唯一的.

证明 对固定的 $t>0$, 将 $G(t, x, y)$ 按特征函数展开. 确切地说, 设 $v\in E_y$, 有

$$G(t, x, y)v=\sum_{i=1}^{\infty} f_i(t, y, v)\varphi_i(x),$$

其中
$$f_i(t, y, v)=\int_M \langle\varphi_i(x), G(t, x, y)v\rangle dx.$$

因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} f_i(t, y, v)&=\int_M \left\langle\varphi_i(x), \frac{\partial}{\partial t}(G(t, x, y)v)\right\rangle dx\\&=\int_M \langle\varphi_i(x), -\Delta_x(G(t, x, y)v)\rangle dx\\&=-\int_M \langle\Delta_x\varphi_i(x), G(t, x, y)v\rangle dx\\&=-\lambda_i\int_M \langle\varphi_i(x), G(t, x, y)v\rangle dx\\&=-\lambda_i f_i(t, y, v),\end{aligned}$$

所以
$$f_i(t, y, v)=k_i(y, v)e^{-\lambda_i t}.$$

注意到 $f_i(t, y, v)$ 对 v 是线性的, 故

$$k_i(y, v)=k_i(y)v,$$

其中用到线性映射

$$k_i(y): E_y\to\mathbf{R}.$$

于是有
$$G(t, x, y)v=\sum_{i=1}^{\infty} e^{-\lambda_i t}\varphi_i(x)k_i(y)v.$$

又由于

$$\alpha(x)=\lim_{t\to 0}\int_M G(t,\ x,\ y)\alpha(y)dy$$
$$-\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\int_M k_i(y)\alpha(y)dy$$

和定理 2.4.2(展开定理)给出的等式

$$\alpha(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\varphi_i(x)\int_M \langle\varphi_i(y),\ \alpha(y)\rangle dy,$$

故知
$$\int_M k_i(y)\alpha(y)dy=\int_M \langle\varphi_i(y),\ \alpha(y)\rangle dy.$$

这就给出了定理的证明. ▌

§2.5 Hodge 定理的推论

在这一节中我们用 Hodge 定理来分别考察 de Rham-Hodge 算子与 Signature 算子. 设M是n维紧致无边的黎曼流形.

$$0\to\Lambda^0(M)\xrightarrow{d}\Lambda^1(M)\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\Lambda^n(M)\to 0$$

是 de Rham 复形 (参见第1章§1.6). 由于$d^2=0$,故若令

$$Z^k(M)=\mathrm{Ker}\{d;\Lambda^k(M)\to\Lambda^{k+1}(M)\}\equiv\{\alpha\in\Lambda^k(M)\,|\,d\alpha=0\},$$
$$B^k(M)=d(Z^{k-1}(M)),$$

则
$$B^k(M)\subset Z^k(M).$$

于是可令
$$H^k_{dR}(M)=Z^k(M)/B^k(M),$$

并称$H^k_{dR}(M)$是M的k维 de Rham(上)同调群. 1928年公布的 de Rham 定理断言: $H^k_{dR}(M)$与代数拓扑学中M的以实数域为系数域的k维上同调群是一致的. 因此$H^k_{dR}(M)$是M的拓扑不变量, 虽然在定义$H^k_{dR}(M)$时需要利用M是微分流形这一事实. 我们不想在这本书中过多涉及代数拓扑学, 所以 de Rham 定理就不介绍了. 对此有兴趣的读者可参阅文献[4]和[10]中的有关章节. $H^k_{dR}(M)$中的元素称为k维同调元. 从$H^k_{dR}(M)$的定义可以看出: 同调元就是$\Lambda^k(M)$中某个闭微分式α的等价类, 或说同调元是用闭微分式α来代表的一个等价类. 在这里说α是闭微分式, 是指$\alpha\in Z^k(M)$. 1935年 Hodge 发表了一个定理, 断言每一个同

调元皆可用唯一的一个调和微分式来代表．我们说 α 是调和微分式，是指

$$d\alpha=0 \quad 且 \quad \delta\alpha=0.$$

我们将所有 k 次调和微分式的集合记作 $\mathscr{H}^k(M)$.

引理 2.5.1 设 M 是 n 维黎曼流形，则

$$\mathscr{H}^k(M)=\operatorname{Ker}\{d+\delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^*(M)\}$$
$$=\operatorname{Ker}\{\Delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^k(M)\}.$$

其中

$$\operatorname{Ker}\{d+\delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^*(M)\}\equiv\{\alpha\in\Lambda^k(M)\mid(d+\delta)\alpha=0\},$$

对于 $\operatorname{Ker}\{\Delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^k(M)\}$ 有类似的解释．

证明 显见

$$\mathscr{H}^k(M)\subset\operatorname{Ker}\{d+\delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^*(M)\}$$
$$\subset\operatorname{Ker}\{\Delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^k(M)\}.$$

故为证引理，只需证明

$$\operatorname{Ker}\{\Delta: \Lambda^k(M)\subset\Lambda^k(M)\}\in\mathscr{H}^k(M).$$

若 $\alpha\in\operatorname{Ker}\{\Delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^k(M)\}$，则

$$\Delta\alpha=0.$$

从而

$$0=\langle\Delta\alpha, \alpha\rangle=\langle(d+\delta)^2\alpha, \alpha\rangle=\langle(d+\delta)\alpha, (d+\delta)\alpha\rangle$$
$$=\langle d\alpha, d\alpha\rangle+\langle\delta\alpha, \delta\alpha\rangle+2\langle d\alpha, \delta\alpha\rangle$$
$$=\langle d\alpha, d\alpha\rangle+\langle\delta\alpha, \delta\alpha\rangle+2\langle dd\alpha, \alpha\rangle$$
$$=\langle d\alpha, d\alpha\rangle+\langle\delta\alpha, \delta\alpha\rangle,$$

于是

$$d\alpha=0 \text{ 且 } \delta\alpha=0.$$

从而便证明了引理．∎

定理 2.5.2 设 M 是 n 维黎曼流形，则

(i) $\mathscr{H}^k(M)$ 是有限维向量空间，其中 $k=0, 1, \cdots, n$.

(ii) $\Lambda^k(M)$ 表为下列向量空间的正交和：

$$\Lambda^k(M)=\mathscr{H}^k(M)\dotplus d(\Lambda^{k-1}(M))\dotplus\delta(\Lambda^{k+1}(M)).$$

证明 由定理 2.4.3(Hodge 定理)知

$$\operatorname{Ker}\{\Delta: \Lambda^k(M)\to\Lambda^k(M)\}$$

是有限维向量空间，所以(i)得证．定理 2.4.3(ii)给出了

$$\Lambda^k(M)=\mathrm{Ker}\{\Delta;\Lambda^k(M)\to\Lambda^k(M)\}+\Delta(\Lambda^k(M)).$$

由于　$\Delta(\Lambda^k(M))\in d(\Lambda^{k-1}(M))+\delta(\Lambda^{k+1}(M))$,

故　$\Lambda^k(M)=\mathscr{H}^k(M)+d(\Lambda^{k-1}(M))+\delta(\Lambda^{k+1}(M))$.

注意到　$\mathscr{H}^k(M),\ d(\Lambda^{k-1}(M)),\ \delta(\Lambda^{k+1}(M))$

彼此垂直．故(ii)得证．定理证毕．▌

注　上述定理 2.5.2 是 Hodge 在 1935 年所得到的．它应该是名正言顺的 Hodge *定理*．而定理 2.4.3 是后人冠名的 Hodge 定理．定理 2.5.2 的完整证明是 Weyl 在 1940 年给出的．

由定理 2.5.2 容易导出以下推论：

推论 2.5.3　下列嵌入

$$i;\mathscr{H}^k(M)\to Z^k(M)$$

诱导出向量空间的同构

$$i_*;\mathscr{H}^k(M)\to H^k_{dR}(M)\equiv Z^k(M)/B^k(M).$$

现在我们转向用 Hodge 定理来考察 Signature 算子，最终将得到：用调和式来表现流形的拓扑不变量 Signature(*符号差*)．

对于 $4k$ 维定向紧致闭流形可以定义 Signature 概念．为了叙述方便，我们只对 $4k$ 维定向紧致闭微分流形 M 来定义 Signature，虽然 Signature 的拓扑定义早已为人熟知．首先我们定义实双线性函数

$$B;\ \Lambda^{2k}(M)\times\Lambda^{2k}(M)\to\mathbf{R},$$

使之满足：对任意的 α、$\beta\in\Lambda^{2k}(M)$，有

$$B(\alpha,\ \beta)=\int_{\vec{M}}\alpha\wedge\beta.$$

容易看出上述 B 可以诱导出下列实双线函数：

$$B_*;\ H^{2k}_{dR}(M)\times H^{2k}_{dR}(M)\to\mathbf{R}.$$

易证 B_* 是对称的．众所周知，对于一个有限维实向量空间上的非退化实对称双线性函数，人们可以定义一个 Signature(*符号差*)的概念．具体定义如下：$H^{2k}_{dR}(M)$可以有下列直和分解：

$$H^{2k}_{dR}(M)=X\oplus Y,$$

使得(i)对于任意 $x\in X$, $y\in Y$,有 $B_*(x, y)=0$.

(ii) 在 X 上 B_* 是严格正定的. 即对 $x\in X$, 若 $x\neq 0$, 则 $B_*(x, x)>0$.

(iii) 在 Y 上 B_* 是严格负定的. 这时定义 B_* 的符号差为

$$\mathrm{Sign}(B_*)=\dim X-\dim Y.$$

(为定义的合理性, 应证明上述 $\mathrm{Sign}(B_*)$ 的定义与 X、Y 的选取无关. 可是这是线性代数学中一个熟知的事实, 故在此就不细述了.)

如果 M 是黎曼流形, 令 $\mathscr{H}^{2k}(M)$ 是 $2k$ 次调和式空间. 将实双线性函数 B 限制在 $\mathscr{H}^{2k}(M)$ 上得到:

$$B_0:\ \mathscr{H}^{2k}(M)\times\mathscr{H}^{2k}(M)\to\mathbf{R}.$$

推论 2.5.3 的同构 i_* 将 B_0 变为 B_*, 故

$$\mathrm{Sign}(B_*)=\mathrm{Sign}(B_0).$$

由第1章 §1.6 的讨论知

$$\begin{aligned}B_0(\alpha, \beta)&=\int_{\vec{M}}\alpha\wedge\beta=\int_{\vec{M}}\alpha\wedge(**\beta)\\&=\int_{\vec{M}}\langle\alpha, *\beta\rangle*1=\int_{\vec{M}}\langle\alpha, *\beta\rangle dv\\&=\langle\langle\alpha, *\beta\rangle\rangle,\end{aligned}$$

其中 α、$\beta\in\mathscr{H}^{2k}(M)$, $\langle\langle, \rangle\rangle$是内积. 将$\langle\langle, \rangle\rangle$限制在 $\mathscr{H}^{2k}(M)$ 上得到新内积$\langle\langle, \rangle\rangle_0$. 从$\langle\langle, \rangle\rangle_0$与 $*$ 的非退化性推知 B_0 是非退化的. 注意到

$$**=1:\ \mathscr{H}^{2k}(M)\to\mathscr{H}^{2k}(M),$$

所以当令

$$X=\{\alpha\in\mathscr{H}^{2k}(M)\,|\,*\alpha=\alpha\},$$

$$Y=\{\alpha\in\mathscr{H}^{2k}(M)\,|\,*\alpha=-\alpha\}$$

之后, 就有

$$\mathscr{H}^{2k}(M)=X\oplus Y.$$

由于

$$B_0(\alpha, \beta)=\langle\langle\alpha, *\beta\rangle\rangle_0=\langle\langle*\alpha, \beta\rangle\rangle_0,$$

故

(i) 当 $\alpha\in X$, $\beta\in Y$ 时, $B_0(\alpha, \beta)=\langle\langle\alpha, *\beta\rangle\rangle_0=-\langle\langle\alpha, \beta\rangle\rangle_0=\langle\langle*\alpha, \beta\rangle\rangle_0=\langle\langle\alpha, \beta\rangle\rangle_0$. 从而 $B_0(\alpha, \beta)=0$.

(ii) 当 α、$\beta\in X$ 时, $B_0(\alpha,\beta)=\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle_0$, 即在 X 上 B_0 是严格正定的.

(iii) 当 $\alpha,\beta\in Y$ 时, $B_0(\alpha,\beta)=-\langle\langle\alpha,\beta\rangle\rangle_0$, 即在 Y 上 B_0 是严格负定的.

于是有　$\mathrm{Sign}(M)=\mathrm{Sign}(B_0)=\dim X-\dim Y$.

定义 2.5.4　设 M 是 $4k$ 维定向流形, 令

$$\mathscr{H}_+^{2k}(M)=\{\alpha\in\Lambda^{2k}(M)\,|\,d\alpha=0,\ \delta\alpha=0,\ *\alpha=\alpha\},$$

$$\mathscr{H}_-^{2k}(M)=\{\alpha\in\Lambda^{2k}(M)\,|\,d\alpha=0,\ \delta\alpha=0,\ *\alpha=-\alpha\}.$$

并分别称 $\mathscr{H}_+^{2k}(M)$、$\mathscr{H}_-^{2k}(M)$ 为正、负调和空间(显然它们正是上面的 X、Y).

引理 2.5.5　设 M 是 $4k$ 维定向紧致无边黎曼流形, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{Sign}(M)&=\dim_{\mathbf{R}}\mathscr{H}_+^{2k}(M)-\dim_{\mathbf{R}}\mathscr{H}_-^{2k}(M)\\&=\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}\{d+\delta:\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)\}\\&\quad-\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}\{d+\delta:\Lambda_-(M)\to\Lambda_+(M)\},\end{aligned}$$

其中 $\dim_{\mathbf{R}}$, $\dim_{\mathbf{C}}$ 分别是实、复向量空间的维数.

证明　设 τ 是 $\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}$ 的超结构, 它给出下列的空间分解:

$$\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}=\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M).$$

(见引理 1.6.10). 注意到

$$\tau=\sqrt{-1}^{\,l(l-1)+2k}*:\Lambda^l(M)\otimes\mathbf{C}\to\Lambda^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C},$$

故知　$$\Lambda^l(M)\otimes\mathbf{C}+\Lambda^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C}$$

是作用 τ 的不变子空间. 从而

$$\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C}$$

也是 τ 的不变子空间, 其中 $\mathscr{H}^l(M)$ 是 l 次调和式空间. 经简单验证知: 当 $l\neq2k$ 时,

$$\varphi_0:\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}\to(\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C})_0:X\mapsto\frac{X+\tau X}{2}$$

和

$$\varphi_1:\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}\to(\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C})_1:X\mapsto\frac{X-\tau X}{2}$$

是同构的，其中

$$(\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C})_0$$
$$=\{\alpha\in\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C}\,|\,\tau\alpha=\alpha\},$$
$$(\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C})_1$$
$$=\{\alpha\in\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C}\,|\,\tau\alpha=-\alpha\}.$$

于是

$$\begin{aligned}&\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}\{d+\delta:\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)\}-\dim_{\mathbf{C}}\ker\{d+\delta:\Lambda_-(M)\\&\to\Lambda_+(M)\}=\sum_{l=0}^{2k-1}\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C})_0\\&\quad-\sum_{l=0}^{2k-1}\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{H}^l(M)\otimes\mathbf{C}+\mathscr{H}^{4k-l}(M)\otimes\mathbf{C})_1\\&\quad+\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{H}^{2k}(M)\otimes\mathbf{C})_0-\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{H}^{2k}(M)\otimes\mathbf{C})_1\\&=\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{H}_+^{2k}(M)\otimes\mathbf{C})-\dim_{\mathbf{C}}(\mathscr{H}_-^{2k}(M)\otimes\mathbf{C})\\&=\dim_{\mathbf{R}}\mathscr{H}_+^{2k}(M)-\dim_{\mathbf{R}}\mathscr{H}_-^{2k}(M)=\mathrm{Sign}(M).\end{aligned}$$

引理证毕. ▌

习题 2.5.6 设 M 是 $4k+2$ 维定向紧致无边黎曼流形，试证

$$\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}\{d+\delta:\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)\}-\dim_{\mathbf{C}}\mathrm{Ker}\{d+\delta:\Lambda_-(M)\to\Lambda_+(M)\}=0.$$

§2.6 指 标 问 题

上一节我们利用 Hodge 定理考察了 de Rham-Hodge 算子与 Signature 算子. 发现由这两个算子确定的调和微分式(即算子的解)与流形的拓扑量(同调类、Betti 数、Signature 数等)密切相关. 因此对于其他的椭圆算子，当然首先要研究这个算子确定的调和式(即算子的解)有何含意. 可是沿着这条解释调和式的思路走下去，没有特别好的结果. 这就提醒人们需将关心的问题作适当的修正. 在关于 Signature 算子

$$D=d+\delta:\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)$$

的研究中，在 $\dim M=4k$ 时，得到的结果是：

$$\dim\mathrm{Ker}\,D-\dim\mathrm{Ker}\,D^*=\mathrm{Sign}(M),$$

其中 D^* 是 D 的伴随算子．这个例子表明数

$$\dim \operatorname{Ker} D-\dim \operatorname{Ker} D^*$$

有重要的意义，我们称它为 D 的指标，记为 $\operatorname{ind}(D)$．至此，现在有理由把关心 $\operatorname{Ker} D$(调和式的集合)的问题改为关心

$$\dim \operatorname{Ker} D-\dim \operatorname{Ker} D^*.$$

事实上还有更为直观的理由支持我们的上述修改，例如当 D 是有限维向量空间之间的线性变换 $D: A\to B$ 时，在向量空间 A 与 B 赋予内积之后，便有 $D^*: B\to A$．此时，$\operatorname{ind} D=\dim \operatorname{Ker} D-\dim \operatorname{Ker} D^*$ 在 D 作变动时是不变的，它恒等于 $\dim A-\dim B$(注意此时 $\dim \operatorname{Ker} D$ 或 $\dim \operatorname{Ker} D^*$ 就不一定不变了)．“Fredholm 积分算子论”讨论的是无穷维空间上的线性算子 D．这个理论的主要结论实际上是关于 $\operatorname{ind} D$ 的一些断言．当然还有别的例子也支持考虑 $\operatorname{ind} D$．尽管如此，真正提出来要研究 $\operatorname{ind} D$ 的人是前苏联数学家 Walter 和 Gelfand．他们在 1960 年澄清了流形上椭圆算子 D 的概念，并认识到 $\operatorname{ind} D$ 在 D 作连续变动时的不变特性，指出它应具有一种“拓扑”性质．由此提出用“拓扑量”来表现指标 $\operatorname{ind} D$ 的问题．现在我们把人们称之为 Gelfand 问题以一个准确的方式陈述如下：

设 E、F 是 M 上的复向量丛，$D: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是椭圆算子．仿照引理 2.5.1 的推理，从关于 D^*D、DD^* 的 Hodge 定理可导出

$$\dim \operatorname{Ker} D<\infty \quad 和 \quad \dim \operatorname{Ker} D^*<\infty.$$

经验证可知　$\dim \operatorname{Ker} D^*=\dim \operatorname{Coker} D,$

其中　$\operatorname{Coker} D\equiv\Gamma(F)/D(\Gamma(E)).$

定义 2.6.1　设 $D: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是椭圆算子，则称

$$\dim \operatorname{Ker} D-\dim \operatorname{Coker} D$$

是 D 的指标，并记为 $\operatorname{ind} D$．

Gelfand 问题　如何用“拓扑不变量”表示 $\operatorname{ind} D$?

在解决 Gelfand 问题之前，需要对问题中的“拓扑不变量”的含意有一个确切一些的定性的理解．上一节的结果表明 de Rham-Hodge 算子与 Signature 算子的指标分别是流形 M 的 Poincaré

数(Betti 数的交错和)与 Signature(符号差). 它们都是“拓扑不变量”. 因此初想起来, 解决 Gelfand 问题就是对 Poincaré 数、符号差这些观念作推广, 使得对每一个椭圆算子 D 皆有一个这样的推广数, 并且证出它等于 $\operatorname{ind} D$. 事实上, 这样的设想是不够的, 还需要对“推广数”有进一步的设想. 如果把这里的“推广”理解为创造一个新的概念, 使得在特殊情形下, 它显然就是 Poincaré 数与符号差, 可以说这样的推广至今还未发现. 但是如果把“推广”理解为创造一个新的概念, 使得在特殊情形下, 经过艰难的论证得知它是 Poincaré 数与符号差. 这样的思考可能就合适了. 这里所说的“新的概念”也许在数学中早已存在, 但不影响我们上述思考的方式. Gelfand 问题中的拓扑不变量正是指的这个新概念.

著名的 Hirzebruch 符号差公式指出: 流形符号差 $\operatorname{Sign}(M)$ 是一个“示性数”. 也就是说, 若 D 是 Signature 算子, 则 $\operatorname{ind}(D)$ 是一个“示性数”. 对于 de Rham-Hodge 算子 D_0 来讲, 容易看出 $\operatorname{ind}(D_0)$ 或者 M 的 Poincaré 数也是一个“示性数”. 对于以后要介绍的 Riemann-Roch 算子 D 来讲, 著名的 Hirzebruch-Riemann-Roch 定理断言: $\operatorname{ind}(D)$ 仍然是一个“示性数”. 从而可以设想: Gelfand 问题中的“拓扑不变量”应该是“示性数”. 事实上, 在 1963 年 Atiyah-Singer 彻底解决 Gelfand 问题时, 发觉这个设想果然是对的. 在这个设想下, Gelfand 问题变为如下的:

Gelfand 问题* 如何用“示性数”表示 $\operatorname{ind}(D)$?

也许只用“示性数”不能表示 $\operatorname{ind}(D)$, 那么 Gelfand 问题*就没有解. 但是如果有解, $\operatorname{ind}(D)$ 的表达式可能就不会很难求出来. 在下一章末尾我们将对此作些说明. 因此能清楚地提出 Gelfand 问题*, 标志着在解决原先的 Gelfand 问题上迈出了一大步.

第3章

陈-韦依理论

§3.1 示性式与示性类

自本世纪三、四十年代起，拓扑学中出现了一个美丽的新篇章，那就是示性类的理论. 这个理论在同调论的基础上给出了空间的新的不变量. 后来陈省身和韦依(Weil)利用微分几何中联络与曲率的观念把示性类重新构造出来，也就是造出示性类的代表闭微分式. 这就是本章要介绍的陈-韦依理论.

设M是n维微分流形. 示性类的理论能对M上任意实向量丛定义庞德里雅金示性类；对M上复向量丛定义陈示性类；对定向偶维(即n为偶数)实向量丛定义欧拉示性类. 所有这些示性类皆是M的上同调群中的元素. 陈-韦依理论则是具体构造出一些闭微分式来代表这些元素.

设$E\to M$是M上实N维向量丛，

$$D: \Gamma(TM)\times\Gamma(E)\to\Gamma(E): (X, W)\mapsto D_X W$$

是一个联络(参见定义1.4.4). 定义曲率(算子)

$$R(X, Y): \Gamma(E)\to\Gamma(E),\ \forall X、Y\in\Gamma(TM)$$

为
$$R(X, Y)=D_X D_Y-D_Y D_X-D_{[X,Y]}.$$

容易验证$R(X, Y)$关于变量X和Y皆是$\mathscr{F}(M)$线性的，并且

$$R(X, Y)=-R(Y, X).$$

上述两个事实可以从流形的局部来看，若选取E的局部截面基$\{W_1, \cdots, W_N\}$，那么用下式

$$R(X, Y)(W_1, \cdots, W_N)=(W_1, \cdots, W_N)\Omega(X, Y)$$

定义的$\Omega(X, Y)$是取值为N阶矩阵的函数. 上述两项事实保证

了 $\Omega(\,,\,)$是取值为 N 阶矩阵的二次微分式．若联络 D 在局部截面基$\{W_1, \cdots, W_N\}$之下表示取值为 N 阶矩阵的一次微分式 ω, 即

$$D_X(W_1, \cdots, W_N)=(W_1, \cdots, W_N)\cdot\omega(X),$$

则由引理1.2.4知

$$\Omega=d\omega+\omega\wedge\omega.$$

假若我们选取一个另外的局部截面基$\{W'_1, \cdots, W'_N\}$, 那么必有取值为 N 阶矩阵的函数(局部的)g, 使得

$$(W'_1, \cdots, W'_N)=(W_1, \cdots, W_N)\cdot g.$$

此外容易证明：若 ω'、Ω' 是联络与曲率在新基$\{W'_1, \cdots, W'_N\}$下的表达式，则(见引理1.2.4)

$$\omega'=g^{-1}\cdot\omega\cdot g+g^{-1}\cdot dg,$$
$$\Omega'=g^{-1}\cdot\Omega\cdot g.$$

另外还有下列计算：

$$d\Omega=d(d\omega+\omega\wedge\omega)=(d\omega)\wedge\omega-\omega\wedge d\omega=\Omega\wedge\omega-\omega\wedge\Omega.$$

将上述等式中的 $\Omega\wedge\omega-\omega\wedge\Omega$ 记为$[\Omega, \omega]$, 故有

$$d\Omega=[\Omega, \omega],$$

并称之为 Bianchi 恒等式.

为了从曲率的表达式 Ω 造出不依赖于局部截面基选取的微分式，这里需要一些代数知识的准备．设 A 是 N 阶实方阵，即 $A\in \mathrm{gl}(N, \mathbf{R})$．众所周知, A 的特征多项式是

$$\det\left(\lambda I+\frac{A}{2\pi}\right)=\lambda^N+\tau_1(A)\lambda^{N-1}+\tau_2(A)\lambda^{N-2}+\cdots+\tau_N(A),$$

其中 I 是单位方阵．易见对任意的 $g\in GL(N, \mathbf{R})$．[$GL(N, \mathbf{R})$ 是可逆的 N 阶实方阵集合], 有

$$\tau_i(g^{-1}\cdot A\cdot g)=\tau_i(A),\ \forall i=1, \cdots, N.$$

将 N 阶方阵 A 换为以二次微分式为元素的 N 阶方阵 Ω, $\tau_i(\Omega)$ 可以类似定义．由于

$$\Omega'=g^{-1}\cdot\Omega\cdot g,$$

故有

$$\tau_i(\Omega')=\tau_i(\Omega).$$

这表明 $\tau_i(\Omega)$不依赖于局部截面基的选取，从而由这些 $\tau_i(\Omega)$可给

出 M 上整体定义的一个 $2i$ 次微分式.

定义 3.1.1 设 E 是 M 上一个实向量丛, D 是 E 的一个联络. 则称由诸 $\tau_i(\Omega)$ 确定的 $2i$ 次微分式为示性微分式, 并记为 $\tau_i(D)$.

基本引理 3.1.2 假设如上, 则

(i) $\tau_i(D)$ 是 M 上的闭微分式, 即对 $\tau_i(D)$ 在任意局部截面基下的表现 $\tau_i(\Omega)$ 有 $d\tau_i(\Omega)=0$.

(ii) 对于 E 上任意的二联络 D 与 D', 则存在 M 上的一个 $(2i-1)$ 次微分式 π, 即 $\pi\in\Lambda^{2i-1}(M)$, 使得

$$\tau_i(D)-\tau_i(D')=d\pi.$$

(iii) 对于任意奇数 i, 存在 $\pi\in\Lambda^{2i-1}(M)$, 使得

$$\tau_i(D)=d\pi.$$

证明 为了证明(i), 我们引进"极化"的概念. 设 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 是变元 $x_1, \cdots, x_n$ 的 m 次复系数齐次多项式, 记 $(x_1, \cdots, x_n)$ 为向量空间 V 中的向量 X, 从而 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$ 可记为 $\varphi(X)$, 它是 V 上的一个复函数, 用下式:

$$\begin{aligned}&\hat{\varphi}(X_1, \cdots, X_m)\\&=\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial t_1\cdots\partial t_m}\varphi(t_1X_1+\cdots+t_mX_m)\big|_{t_1=\cdots=t_m=0}\end{aligned}$$

定义

$$\hat{\varphi}:\underbrace{V\times\cdots\times V}_{m\text{个}}\to \boldsymbol{C},$$

$\hat{\varphi}$ 称为 φ 的极化. 易见 $\hat{\varphi}$ 有如下性质:

(1) $\hat{\varphi}(X_1, \cdots, X_m)$ 关于各因子 $X_1, \cdots, X_m$ 皆是线性的.

(2) $\hat{\varphi}(\underbrace{X, \cdots, X}_{m\text{个}})=\varphi(X)$.

如果取 $\mathrm{gl}(N, \mathbf{R})$ 为上述向量空间 V, 那么对 m 次多项式 $\varphi(A)$、$A\in \mathrm{gl}(N, \mathbf{R})$, 便有极化

$$\hat{\varphi}: \underbrace{\mathrm{gl}(N, \mathbf{R})\times\cdots\times gl(N, \mathbf{R})}_{m\text{个}}\to\mathbf{C}$$

使得: $\hat{\varphi}(A_1, \cdots, A_m)$ 对各个因子 $A_1, \cdots, A_m$ 皆是线性的, 并且 $\hat{\varphi}(A, \cdots, A)=\varphi(A)$. 此外, 如果 $\varphi(A)$ 具有性质: 对于任意的 $g\in$

$GL(N, \mathbf{R})$, 有$\varphi(g^{-1}\cdot A\cdot g)=\varphi(A)$. 则 $\hat{\varphi}$ 有下列类似性质:

(3) $\hat{\varphi}(g^{-1}\cdot A_1\cdot g, \cdots, g^{-1}\cdot A_m\cdot g)=\hat{\varphi}(A_1, \cdots, A_m)$.

由上述(3),有如下计算:

对于任意的 $B\in \mathrm{gl}(N, \mathbf{R})$,有

$$\begin{aligned}
0&=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}[\varphi(e^{-tB}Ae^{tB})-\varphi(A)]\\
&=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\varphi(e^{-tB}\cdot A\cdot e^{tB})\\
&=\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}\hat{\varphi}(e^{-tB}Ae^{tB}, \cdots, e^{-tB}Ae^{tB})\\
&=\sum_{j=1}^{m}\hat{\varphi}(A, \cdots, A, \underset{(j\text{位})}{\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0}(e^{-tB}Ae^{tB})}, A, \cdots, A)\\
&=\sum_{j}\hat{\varphi}(A, \cdots, A, \underset{(j\text{ 位})}{[A, B]}, A, \cdots, A).
\end{aligned}$$

现在证明基本引理中的(i): 令 $\varphi=r_i$, 有如下形式的计算:

$$\begin{aligned}
d\varphi(\Omega)&=d\hat{\varphi}(\Omega, \cdots, \Omega)=\sum_{j}\hat{\varphi}(\Omega, \cdots, \Omega, \underset{(\text{第 }j\text{ 位})}{d\Omega}, \Omega, \cdots, \Omega)\\
&=\sum_{j}\hat{\varphi}(\Omega, \cdots, \Omega, [\Omega, \omega], \Omega, \cdots, \Omega)=0,
\end{aligned}$$

式中用到了 Bianchi 恒等式 $d\Omega=[\Omega, \omega]$.

我们说上面的计算是"形式的", 是因为在极化 $\hat{\varphi}$ 中的变元因子是矩阵,而这里的变元因子是 Ω 和 ω. 它们是以微分式为元素的矩阵. 对于这样的矩阵作计算时,应处处小心. 经仔细检验,上述形式的计算确实是对的(请读者当作习题检验一下). 此外, 若 α_j、β 分别是以$|\alpha_j|$次、$|\beta|$次微分式为元素的矩阵,则令

$$[\alpha_j, \beta]=\alpha_j\wedge\beta-(-1)^{|\alpha_j|\cdot|\beta|}\beta\wedge\alpha_j.$$

请读者证明:若 $\varphi=r_i$, 则 $m=i$, 且

$$\sum_{j}(-1)^{(\sum_{k<j}|\alpha_k|)\cdot|\beta|}\hat{\varphi}(\alpha_1, \cdots, \alpha_{j-1}, [\alpha_j, \beta], \alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_m)=0.$$

现在转来证明(ii): 设在局部基$\{W_1, \cdots, W_N\}$下联络 D、D' 分别表现为 ω、ω', 即它们满足

$$D(W_1, \cdots, W_N)=(W_1, \cdots, W_N)\cdot\omega,$$
$$D'(W_1, \cdots, W_N)=(W_1, \cdots, W_N)\cdot\omega'.$$

令
$$\alpha=\omega'-\omega,$$
$$\omega_t=\omega+t\alpha,$$
$$\Omega_t=d\omega_t+\omega_t\wedge\omega_t.$$
于是有
$$\frac{\partial}{\partial t}\omega_t=\alpha,$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega_t=d\alpha+\alpha\wedge\omega_t+\omega_t\wedge\alpha=d\alpha+[\alpha,\omega_t].$$
因此
$$\varphi(\Omega')-\varphi(\Omega)=\varphi(\Omega_1)-\varphi(\Omega_0)=\int_0^1\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\Omega_t)dt.$$
由于
$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\varphi(\Omega_t)&=\frac{\partial}{\partial t}\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\Omega_t)=\sum_i\hat{\varphi}\Big(\Omega_t,\cdots,\underset{(\text{第 }i\text{ 位})}{\frac{\partial}{\partial t}\Omega_t},\cdots,\Omega_t\Big)\\&=\sum_i\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\Omega_t,d\alpha+[\alpha,\omega_t],\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\&=\sum_i d\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\Omega_t,\underset{(\text{第 }i\text{ 位})}{\alpha},\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\&\quad-\sum_i\sum_{j<i}\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\underset{(\text{第 }j\text{ 位})}{d\Omega_t},\cdots,\Omega_t,\underset{(\text{第 }i\text{ 位})}{\alpha},\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\&\quad-\sum_i\sum_{j>i}\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\Omega_t,\underset{(\text{第 }i\text{ 位})}{\alpha},\Omega_t,\cdots,\underset{(\text{第 }j\text{ 位})}{d\Omega_t},\cdots,\Omega_t)\\&\quad+\sum_i\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\Omega_t,[\alpha,\omega_t],\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\\&=d\{\sum_i\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\Omega_t,\underset{(\text{第 }i\text{ 位})}{\alpha},\Omega_t,\cdots,\Omega_t)\},\end{aligned}$$
所以
$$\varphi(\Omega')-\varphi(\Omega)=d\int_0^1\{\sum_i\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\underset{(\text{第 }i\text{ 位})}{\alpha},\cdots,\Omega_t)\}dt.$$
为了证明(ii)，须证明 $\int_0^1\{\sum_i\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\alpha,\cdots,\Omega_t)\}dt$ 可以拼成M上的一个外微分式. 为此考虑另外一个局部截面基 $\{\tilde{W}_1,\cdots,\tilde{W}_N\}$，使得
$$(\tilde{W}_1,\cdots\tilde{W},_N)=(W_1,\cdots,W_N)\cdot g.$$
前面计算中的 ω_t、Ω_t 等在新的基下表为 $\tilde{\omega}_t$、$\tilde{\Omega}_t$ 等. 此时有
$$\tilde{\Omega}_t=g^{-1}\cdot\Omega_t\cdot g,$$
$$\tilde{\alpha}=g^{-1}\cdot\alpha\cdot g.$$
从面
$$\hat{\varphi}(\tilde{\Omega}_t,\cdots,\tilde{\alpha},\cdots,\tilde{\Omega}_t)=\hat{\varphi}(\Omega_t,\cdots,\alpha,\cdots,\Omega_t).$$

这就证明了不同截面基下的$\int_0^1\{\sum_i\tilde{\varphi}(\Omega_t,\ \cdots,\ \alpha,\ \cdots,\ \Omega_t)\}dt$可以拼成一个微分式$\pi$. 于是证得(ii).

因为在向量丛E上总可以取一个内积$\langle,\rangle$和一个容许的联络D, 即它们满足

$$d\langle\xi,\ \eta\rangle=\langle D\xi,\ \eta\rangle+\langle\xi,\ D\eta\rangle,\ \forall\xi、\eta\in\Gamma(E),$$

从而在幺正局部基$\{W_1,\ \cdots,\ W_N\}$下, 有

$$\omega_{ij}=\langle DW_i,\ W_j\rangle=d\langle W_i,\ W_j\rangle-\langle W_i,\ DW_j\rangle=-\omega_{ji}.$$

这表明$\omega=(\omega_{ij})$是反称阵(其内元素是一次微分式). 由此用公式

$$\Omega=d\omega+\omega\wedge\omega$$

推得Ω也是反称的. 注意, 一个反称矩阵A的特征多项式有下列性质:

$$\det(\lambda I+A)=\det(\lambda I+A)^t=\det(\lambda I+A^t)=\det(\lambda I-A),$$

即可推出

$$\begin{aligned}&\lambda^N+r_1(A)\lambda^{N-1}+r_2(A)\lambda^{N-2}+\cdots+r_N(A)\\&\quad=\lambda^N-r_1(A)\lambda^{N-1}+r_2(A)\lambda^{N-2}+\cdots+(-1)^Nr_N(A).\end{aligned}$$

对比等式的两端可知: 当i为奇数时, 有

$$r_i(A)=0.$$

由此不难从(ii)推知(iii)成立. 至此便证明了基本引理3.1.2.▌

由上述基本引理3.1.2中的(i)可知$r_i(D)$是一个闭微分式, 从而可确定一个上同调类$\{r_i(D)\}\in H^{2i}(M,\ \mathbf{R})$. (ii)表明这一同调类与联络$D$的选取无关. (iii)表明只有$\{r_{2i}(D)\}$才有意义.

定义3.1.3 设E是M上的一个实向量丛, 令

$$p_i(E)=\{r_{2i}(D)\}\in H^{4i}(M,\ \mathbf{R}),$$

其中D是E上任取的一个联络, 并称$p_i(E)$为实向量丛E的第i个Pontrjagin示性类. 此外把$r_{2i}(D)$记为$p_i(D)$, 称为第i个Pontrjagin示性式.

对于M上定向的$2k$维实向量丛, 除去上述的Pontrjagin示性类外还可以定义Euler类, 以下作些介绍:

设 E 是 M 上定向 $2k$ 维实向量丛，并设 E 上有内积 $\langle , \rangle$ 和一个容许的联络 D. 于是在 E 的任一局部顺向幺正基 $\{W_1, \cdots, W_{2k}\}$ 下，用下列

$$D(W_1, \cdots, W_{2k})=(W_1, \cdots, W_{2k})\cdot\omega$$

确定的 ω 是反称的. 对于 E 的任意两个局部顺向幺正基 $\{W_1, \cdots, W_{2k}\}$, $\{\widetilde{W}_1, \cdots, \widetilde{W}_{2k}\}$，必有取值在 $SO(2k)$ 中的函数 g，使得

$$(\widetilde{W}_1, \cdots, \widetilde{W}_{2k})=(W_1, \cdots, W_{2k})\cdot g.$$

由此可以推出 $\widetilde{\Omega}$ 是反称的，并且

$$\widetilde{\Omega}=g^{-1}\cdot\Omega\cdot g.$$

仿照 Pontrjagin 示性微分式(定义 3.1.1)的定义，我们先引进一个异于 $r_i(A)$ 的不变量 $Pf(A)$ 如下：设 A 是一个反称矩阵，任意选定 $\boldsymbol{R}^{2k}$ 的一组基 $\delta_1, \cdots, \delta_{2k}$，由下列等式：

$$\frac{1}{k!}\Big(\sum_{i<j}A_{ij}\delta_i\wedge\delta_j\Big)^k=Pf(A)\delta_1\wedge\cdots\wedge\delta_{2k}$$

可唯一确定 $Pf(A)$. 显然 $Pf(A)$ 与基底 $\delta_1, \cdots, \delta_{2k}$ 的选取无关. 我们称 $Pf(A)$ 为反称矩阵 A 的法甫式(Pfaffian). 对于任意 $B\in GL(2k, \mathbf{R})$，令 $(\eta_1, \cdots, \eta_{2k})$ 满足

$$(\eta_1, \cdots, \eta_{2k})B^t=(\delta_1, \cdots, \delta_{2k}),$$

于是

$$\begin{aligned}\sum_{i,j}A_{ij}\delta_i\wedge\delta_j&=\sum_{i,j}\sum_{\alpha,\beta}A_{ij}B_{i\alpha}B_{j\beta}\eta_\alpha\wedge\eta_\beta\\&=\sum_{\alpha,\beta}(B^t\cdot A\cdot B)_{\alpha\beta}\eta_\alpha\wedge\eta_\beta,\end{aligned}$$

从而 $\quad Pf(A)\delta_1\wedge\cdots\wedge\delta_{2k}=Pf(B^t\cdot A\cdot B)\eta_1\wedge\cdots\wedge\eta_{2k}$

即 $\quad Pf(A)\cdot\det B=Pf(B^t\cdot A\cdot B).$

特别地，当 $B\in SO(2k)$ 时，上述等式变为

$$Pf(B^{-1}\cdot A\cdot B)=Pf(A).$$

接下来引进欧拉示性微分式就是极为自然的事了.

定义 3.1.4 设 E 是 M 上定向 $2k$ 维向量丛，其上具有内积和一个容许的联络 D. 任取一局部幺正截面基，令 ω 是 D 在此基下的表达式，$\Omega=d\omega+\omega\wedge\omega$. 以 $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^k Pf(\Omega)$ 来确定 M 上的一个

$2k$ 次微分式，称为欧拉示性(微分)式，记作 $\widetilde{Pf}(D)$.

习题 3.1.5 仿照基本引理 3.1.2 的证明，试证 $\widetilde{Pf}(D)$ 是闭的微分式，它所代表的上同调类与 E 上的内积和容许联络的选取无关.

定义 3.1.6 对于 M 上定向 $2k$ 维向量丛，在任取的内积和容许联络 D 下，欧拉示性式 $\widetilde{Pf}(D)$ 代表的上同调类称为是 E 的欧拉(示性)类，简记为 $\widetilde{Pf}(E)$.

定义 3.1.7 设 M 是 $2k$ 维定向黎曼流形，令 $E=TM$，向量丛 E 上的内积就取为 M 的黎曼内积，D 取为 Levi-Civita 联络 ∇，于是我们分别称 $p_i(\nabla)$、$p_i(TM)$、$\widetilde{Pf}(\nabla)$、$\widetilde{Pf}(TM)$ 为 M 的 Pontrjagin 示性式、Pontrjagin 示性类、欧拉示性式和欧拉示性类(容易验证这里定义的示性类与黎曼度量的选取无关).

设 E 是 M 上一个 N 维复向量丛. 在取定一个联络(见定义 1.4.4)D 之后，对于任意局部复标架场$\{W_1, \cdots, W_N\}$，用下式

$$D(W_1, \cdots, W_N)=(W_1, \cdots, W_N)\omega$$

确定取值在 $\mathrm{gl}(N, \mathbf{C})$中的一次微分式 ω. 令

$$\Omega=d\omega+\omega\wedge\omega.$$

将前面定义的 $r_i(A)$自然扩充到 A 是复矩阵的情况，此时得到的多项式 $r_i^{\mathbf{C}}(A)$ 满足 $\det\left(\lambda I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}A\right)=\lambda^N+r_1^{\mathbf{C}}(A)\lambda^{N-1}+\cdots+r_N^{\mathbf{C}}(A)$. 易知用 $r_i^{\mathbf{C}}(\Omega)$可以确定 $\Lambda^{2i}(M)\otimes\mathbf{C}$ 中一个元素($2i$ 次复微分式)，简记为 $c_i(D)$. 可证 $c_i(D)$是闭的，它所代表的上同调类与 D的选取无关. 这个上同调类记为 $c_i(E)$.

定义 3.1.8 设 E 是 M 上一个 N 维复向量丛，D 是其上一个联络，则上面造出的 $c_i(D)$、$c_i(E)$分别称为 E 的第 i 个陈示性式和第 i 个陈示性类.

注 3.1.9 我们知道 $p_i(D)$、$\widetilde{Pf}(D)$是实微分式，$c_i(D)$是复微分式. 它们代表的上同调类 $p_i(E)$、$\widetilde{Pf}(E)$和$c_i(E)$ 确切地讲，分别属于不同的同调群:

$$p_i(E)、\widetilde{Pf}(E) \in H^*(M, \mathbf{R}),$$

$$c_i(E)\in H^*(M, \mathbf{C}).$$

由于在定义p_i、c_i时，我们在确定r_i的式子中适当选择了常数，并且又令$e(A)=\widetilde{Pf}(A)$，其结果使我们得到的$p_i(E)$、$e(E)$、$c_i(E)\in H^*(M, \mathbf{Z})$是整系数同调类．这件事是需要证明的，不过，由于在此我们不打算应用这一结论，所以在本书中就不介绍了．为了以后陈述方便，我们不妨把$p_i(E)$、$e(E)$、$c_i(E)$皆理解为$H^*(M, \mathbf{C})$中的元素，而且$p_i(D)$、$e(D)$、$c_i(D)\in \Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}$.

定义 3.1.10 设M是一个微分流形，对于M上的任意向量丛与其上相容的联络，用前面的方法造出 Pontrjagin 示性式、欧拉示性式、陈示性式，它们都是M上的微分式．在M上的向量丛及相容联络的所有可能选取下得到的这些微分式集合，记作

$$\mathrm{CHF}(M)\subset\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C},$$

称之为M的示性式集合．$\mathrm{CHF}(M)$中的元素称为示性式．

注 容易验证：由集合$\mathrm{CHF}(M)$产生的最小外微分式环就是$\mathrm{CHF}(M)$本身．

定义 3.1.11 设M是一个定向n维微分流形，α是一个n次示性式（即$\alpha\in\Lambda^*(M)\otimes\mathbf{C}$），则称$\int_{\vec{M}}\alpha$是$M$的一个示性数．

注 3.1.12 正如本章开始所言，陈-韦依理论是用微分几何方法构造出微分式，并以之作为示性类的代表．可是直到现在，我们并没有证明在本节中引出的$p_i(E)$、$e(E)$、$c_i(E)$恰是拓扑学中的 Pontrjagin、欧拉、陈示性类，而且将来也不打算证明．这是因为所欲证明的结论对我们来讲虽然是重要的，但证明中的技术细节一时还用不着．

统观本节所说的陈-韦依理论，也许会给人这样一个印象，似乎除去构思巧妙之外，没有特别艰深的论证．照常理推测，这个理论不会是深刻的．可是情况恰恰相反，陈-韦依理论揭示了示性类理论中最深刻的一个侧面．对此特作如下解释：大家知道示性类是刻划空间（确切讲是向量丛）的拓扑不变量，这种不变量带有强烈的整体特性．当向量丛限制在底空间中任何一点附近时，它

总是平凡的，故向量丛之间的差别必然来自整体的构成方式.这就自然使刻划向量丛的不变量带有强烈的整体特性．这种整体的不变量如何由各个局部的不变量拼凑起来，自然是一个深刻的研究课题．例如在代数拓扑学中的 Pontrjagin 示性类如何从空间的某种拓扑的或组合的局部不变量拼凑起来？这还是一个不太清楚的问题．可是陈-韦依理论却能断言：Pontrjagin 示性类可以从空间的局部微分几何量拼凑出来.这的确是一件了不起的事.如果说陈-韦依理论是对示性类理论的新认识，那是一点也不过分的.

§3.2* 示性式与示性类的一般理论

初读本书，可以越过这一节而不致有所影响．在§3.1中我们对 M 上各种不同的向量丛引进示性式、示性类的概念．回想起来，一个 N 维实向量丛相当于一个 $GL(N, \mathbf{R})$主丛．对于稍有经验的读者来讲，一些带有几何结构的向量丛也常常相当于某一个 G 主丛．因此我们不禁要问：对于一个 G 主丛，是否仍可以用陈-韦依的办法引进示性式和示性类呢？情况确实如此．设给定一个 M 上的 G 主丛 P和一个 P 上的联络$[\omega]$，其中

$$[\omega]=\{\omega_\sigma \mid \sigma\in MF(P)\}$$

(详情见定义1.3.7)．令 $\mathfrak{G}$ 是群 G 的李代数．设 φ 是 $\mathfrak{G}$ 上一个复系数的m次多项式映射(注意，在向量空间上有多项式映射的概念)．如果对于任意的 $g_0\in G$, $a\in\mathfrak{G}$, 有

$$\varphi(Ad(g_0)\cdot a)=\varphi(a),$$

则称 φ 是m次不变多项式．$\mathfrak{G}$ 上所有不变多项式的集合记作

$$\mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}].$$

对于主丛 P 的任意一个局部截面 $\sigma: U\to P$, 联络$[\omega]$给出一个 U 上的取值在 $\mathfrak{G}$ 中的一次微分式 ω_σ和二次微分式 Ω_σ，其中

$$\Omega_\sigma=d\omega_\sigma+\frac{1}{2}[\omega_\sigma,\ \omega_\sigma].$$

由于

$$\Omega_{\sigma g}=Ad(g^{-1})\Omega_\sigma,$$

故对于 $\varphi\in\mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]$，有

$$\varphi(\Omega_{\sigma g})=\varphi(\Omega_\sigma).$$

于是

$$\{\varphi(\Omega_\sigma)\mid\sigma\in MF(P)\}$$

给出 M 上的一个 $2m$ 次微分式，记作 $\varphi([\omega])$. 仿照本章 § 3.1 的讨论可知 $\varphi([\omega])$ 是闭微分式，我们称之为 φ 示性式. 它代表的同调类称为 φ 示性类，记为 $\varphi(P)$. 至此，可见陈-韦依的方法对带有联络的主丛也是有效的.

现在对陈-韦依法作一个小结. 令

$$\mathscr{A}_M(G)=\{(P,([\omega])\mid P\text{ 是 }M\text{ 上的 }G\text{ 主丛, }[\omega]\text{ 是 }P\text{ 上的联络}\},$$

$$\mathscr{B}_M(G)=\{P\mid P\text{ 是 }M\text{ 上的 }G\text{ 主丛}\}.$$

于是陈-韦依理论给出了下列映射:

$$CW:\mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]\times\mathscr{A}_M(G)\to A^*(M):$$

$$(\varphi,(P,[\omega]))\mapsto\varphi([\omega]),$$

并且在论证：$\varphi([\omega])$ 是闭微分式，$\varphi([\omega])$ 代表的同调类与 $[\omega]$ 的选取无关之后便给出映射

$$CW_*:\mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]\times\mathscr{B}_M(G)\to H^*(M;\mathbf{C}).$$

映射 CW 与 CW_* 构成了示性式与示性类理论的一种标准框架. 在代数拓扑学中对于更大的集合 $\mathscr{B}'_M(G)$ 都可以定义 CW_*（当然这种代数拓扑的定义早于陈-韦依理论）. 这里的 $\mathscr{B}'_M(G)$ 是 M 上 G 主丛的集合，M 可以不是微分流形，主丛也不必是可微的.

下面介绍映射 CW、CW_* 的一个重要性质：设 G、G_0 是李群，

$$\xi:G\to G_0$$

是一个群同态. 对于任意 $(P,[\omega])\in\mathscr{A}_M(G)$，定义 $(P_0,[\theta])\in\mathscr{A}_M(G_0)$ 如下:

$$P_0=P\times_\xi G_0,$$

$$\theta_{\sigma_0}=Ad(f_0^{-1})\cdot\xi_*\omega_\sigma+f_0^*(g^{-1}dg),$$

其中 $P\times_\xi G_0$ 的定义见第 1 章 § 1.4，用到的 G 在 G_0 上的左作用由下式给出:

$$G\times G_0\to G_0:(g,a)\mapsto\xi(g)\cdot a,$$

σ_0 是 P_0 的一个局部截面，它表为

$$\sigma_0 \equiv (\sigma,\ f_0),$$

这里 $\sigma: U \to P$ 是主丛 P 的一个局部截面，$f_0: U \to G_0$ 是一个映射；$g^{-1}\cdot dg$ 是在第1章注1.3.7′中定义的．容易验证：P_0 是一个 G_0 主丛，

$$[\theta] \equiv \{\theta_{\sigma_0} \mid \sigma_0 \in MF(P_0)\}$$

是 P_0 上的一个联络．于是我们定义

$$\xi_{\mathscr{A}}: \mathscr{A}_M(G) \to \mathscr{A}_M(G_0): (P,\ [\omega]) \mapsto (P_0,\ [\theta]),$$

$$\xi_{\mathscr{B}}: \mathscr{B}_M(G) \to \mathscr{B}_M(G_0): P \mapsto P_0.$$

另外由同态 $\xi: G \to G_0$ 可诱导出李代数的同态

$$\xi_*: \mathfrak{G} \to \mathfrak{G}_0,$$

进而诱导出 $\xi^*: \mathbf{C}[\mathfrak{G}_0] \to \mathbf{C}[\mathfrak{G}]: \psi \mapsto \psi \circ \xi_*.$

由验算可知 ξ^* 可以限制为

$$\xi^*: \mathbf{C}^{Ad(G_0)}[\mathfrak{G}_0] \to \mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}].$$

现在我们陈述 CW 与 CW_* 的一个重要性质(见下列命题)：

命题 3.2.1 设 $\xi: G \to G_0$ 是一个李群同态，则对于任意的 $(P,\ [\omega]) \in \mathscr{A}_M(G)$，$\psi \in \mathbf{C}^{Ad(G_0)}[\mathfrak{G}_0]$，

$$CW(\xi^*\psi,\ (P,\ [\omega])) = CW(\psi,\ \xi_{\mathscr{A}}(P,\ [\omega])),$$

$$CW_*(\xi^*\psi,\ P) = CW_*(\psi,\ \xi_{\mathscr{B}}(P)).$$

命题3.2.1的证明直接取自陈-韦依的构造法，故不细述了．

习题 3.2.2 设 $G = GL(N,\ \mathbf{R})$．此时一个 G 主丛 P 就相当于一个 N 阶实向量丛 E，即

$$E = P \times_{GL(N,\mathbf{R})} \mathbf{R}^N.$$

同时 P 上的一个联络 $[\omega]$ 就相当于 E 上一个联络 D．试证存在唯一的 $p_i \in \mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]$，使得对于任意的 $(P,\ [\omega]) \in \mathscr{A}_M(G)$，有

$$p_i(D) = CW(p_i,\ (P,\ [\omega])) \in \Lambda^{4i}(M),$$

$$p_i(E) = CW_*(p_i,\ P) \in H^{4i}(M,\ \mathbf{C}).$$

定义 3.2.3 我们把习题3.2.2中的 $p_i \in \mathbf{C}^{Ad(GL(N,\mathbf{R}))}[\mathrm{gl}(N,\ \mathbf{R})]$ 称为第 i 个泛 Pontrjagin 示性类．

类似地，我们可以定义泛欧拉类和泛陈示性类．$\mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]$ 的结构是简单的，熟悉李代数理论的读者会很容易写出下列这个等式：

$$\mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]=\mathbf{C}^{W(G)}[\mathfrak{H}(G)],$$

其中 $\mathfrak{H}(G)$是群 G 的 Cartan 子代数，$W(G)$是 G 的 Weyl 群. 对于许多 G，空间 $\mathbf{C}^{W(G)}[\mathfrak{H}(G)]$是熟知的，于是泛示性类通常放在 $\mathbf{C}^{W(G)}[\mathfrak{H}(G)]$中能以代数表达式方式显示出来. 设 ξ: $T\subset G$ 是极大环面子群，那么 T 的李代数 $\mathfrak{T}$ 就是 $\mathfrak{H}(G)$. 易见

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]=\mathbf{C}^{W(G)}[\mathfrak{H}](G)]=\mathbf{C}^{W(G)}[\mathfrak{T}] \\ \xi^*\searrow \qquad\qquad \swarrow i \\ \mathbf{C}^{Ad(T)}[\mathfrak{T}]=\mathbf{C}[\mathfrak{T}] \end{array}$$

是交换图表，其中

$$i: \mathbf{C}^{W(G)}[\mathfrak{H}(G)]\to\mathbf{C}[\mathfrak{H}(G)]$$

是嵌入映射. 当 $G=GL(N, \mathbf{R})$或 $GL(N, \mathbf{C})$时，$\mathbf{C}\{\mathfrak{H}]$是$\{x_1, \cdots, x_{[\frac{N}{2}]}\}$或$\{y_1, \cdots, y_N\}$的多项式集合. 这里的 $x_1, \cdots, x_{[\frac{N}{2}]}$或 $y_1, \cdots, y_N$ 叫作陈根. 容易看出陈根的某种"对称的代数多项式"恰好属于上面嵌入 i 的像集合. 因此可以用陈根把握泛示性类. Borel-Hirzebruch 曾经使用陈根作出过重要的计算.

在结束这一节之前，我们希望用示性类的知识回过头来考察第 2 章§2.6 中的 Gelfand 问题. 现在就所有的 Signature 算子探讨如何解决 Gelfand 问题*(我们当然先假定 Gelfand 问题*有解). 设 $\widetilde{M}$ 是 $4k$ 维定向流形. Signature 算子

$$D(\widetilde{M})\equiv d+\delta: \Lambda_+(\widetilde{M})\to\Lambda_-(\widetilde{M})$$

的定义见定义 1.6.11. 令

$$GL^+(4k, \mathbf{R})=\{A\in GL(4k, \mathbf{R})|\det A>0\},$$

$$GL^+(\widetilde{M})=\widetilde{M} \text{ 上顺向幺正标架的集合.}$$

易见 $GL^+(\widetilde{M})$是一个 $GL^+(4k, \mathbf{R})$主丛. 不难看出：Gelfand 问题*有解实际上等价于下列事实成立：

"存在泛示性类 $L_k\in\mathbf{C}^{Ad(GL^+(4k,\mathbf{R}))}[\mathrm{gl}^+(4k, \mathbf{R})]$，使得对于任意的 $4k$ 维定向流形 $\widetilde{M}$，有下列等式成立：

$$\operatorname{ind} D(\widetilde{M})=CW_*(L_k, GL^+(\widetilde{M}))[\widetilde{M}]".$$

上面陈述的事实(或猜测)是至关重要的，因为只须另外再注意到关于 $\operatorname{ind} D(\widetilde{M})$的下列两条性质之后，$L_k$ 便能确切地求出来了. 关

于 ind $D(\vec{M})$的两条性质如下：

(i) ind $D(\overleftarrow{M}) = -$ ind $D(\vec{M})$，其中 $\overleftarrow{M}$ 表示与 $\vec{M}$ 反定向的流形.

(ii) ind $D(\vec{M}_1 \times \vec{M}_2) =$ ind $D(\vec{M}_1) \cdot$ ind $D(\vec{M}_2)$. 至于如何求出 L_k 的表达式，这只须在上面关于 ind$D(\vec{M})$的等式中令 $\vec{M}$ 为一些复投影空间的不同乘积，便能很容易定出 L_k. 这在解决 Signature 算子的 Gelfand 问题上显然是决定性的一步. 对于一般的椭圆算子，假定存在类似的泛示性类，事实上，对求出ind D 的表达式也是很关键的. 因此，“存在泛示性类”这一想法完全可以和一些用来证明 Atiyah-Singer 指标定理的物理想法媲美，可惜人们不重视它，也许这个思考方法不够奥妙. 至于如何论证 Gelfand 问题*有解，那只能硬碰硬地去证明. 在 Signature 算子的情形，Hirzebruch 利用 Thom 的配边理论去论证的. 这个配边理论的推广造成了 Atiyah-Singer 指标定理的第一个证明.

§3.3 陈根算法

在 §3.1 中引入 Pontrjagin 示性式 $p_i(\nabla)$和欧拉示性式 $\widetilde{pf}(\nabla)$(见定义 3.1.7)时，我们利用了多项式 $\tau_{2i}(\quad)$与 $Pf(\quad)$. 在 §3.2 中把 $\tau_{2i}(\quad)$, $Pf(\quad)$解释为$\mathbf{C}^{Ad(G)}[\mathfrak{G}]$中的元素，进而又解释为 $\mathbf{C}^{W(G)}[\mathfrak{T}]$或 $\mathbf{C}[\mathfrak{T}]$中的元素，以致可以用“陈根”来表示它们. 如果我们不去理会 §3.2 中讲的细节，则可把“陈根表示法”想成示性式的命名法. 也就是说把以人名命名的示性式换为用“对称”多项式来命名. 例如把第 i 个 Pontrjagin 示性式改写为$(u_1^{2i}+\cdots+u^{2i}_{[\frac{N}{2}]})$-示性式，这里的 $u_1, \cdots, u_{[\frac{N}{2}]}$就是陈根.

定义 3.3.1 设 E 是 M 上定向的 $2l$ 阶实向量丛，又设在 E 上取定一个内积和一个容许的联络 D，令 $u_1, \cdots, u_l$ 为陈根. 在以$\{u_1, \cdots, u_l\}$为生成元的多项式环 Poly$[u_1, \cdots, u_l]$中，记 $u_1^2, \cdots, u_l^2$ 的初等对称多项式为

$$\sigma_1 = u_1^2 + \cdots + u_l^2,$$

$$\sigma_2=\sum_{i<j}u_i^2u_j^2,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\sigma_l=u_1^2\cdots u_l^2.$$

并记
$$pf=u_1\cdots u_l.$$

作映射 ζ: $\mathrm{Poly}[\sigma_1, \cdots, \sigma_l, pf]\to \mathrm{CHF}(M)$,

使得 $\zeta(\sigma_i)=p_i(D)$, $\zeta(pf)=pf(D)$.

那么当 $\sigma\in\mathrm{Poly}[\sigma_1, \cdots, \sigma_l, pf]$时, 称$\zeta(\sigma)$为 σ-示性式.

引理 3.3.2 假设同定义 3.3.1, 又设 f 是一个 $p_i(D)$ 与 $pf(D)$的多项式, 即

$$f=f(p_1(D), \cdots, p_l(D), pf(D)).$$

如将下式

$$(\Omega_{ij})=\sum_{s=1}^{l}2\pi u_s(\theta_{2s-1,2s}-\theta_{2s,2s-1}) \qquad (*)$$

代入 f 的表达式, 得到 $\mathrm{Poly}[x_1, \cdots, x_l]$中一个元素 σ, 则

(i) $\sigma\in\mathrm{Poly}[\sigma_1, \cdots, \sigma_l, pf]$; (ii) f 是 σ-示性式.

上面出现的 $\theta_{i,j}$ 是 $2l$ 阶方阵, 它的第(i, j)元是 1, 而其余元素为零.

引理 3.3.2 与定义 3.3.1 几乎是同语反复, 故不多说了, 请读者自行验证.

注 3.3.3 上面我们称 f 是 σ-示性式, 照通常理解就是把示性式 f 表为陈根 $u_1, \cdots, u_l$ 的多项式 σ. 所以定义 3.3.1 实际上是"陈根表示法". 但是在引理 3.3.2 中情形有些不同, 在那里容许将陈根当作多项式变元参与运算, 这是一种"陈根算法". 在确切定义陈根算法之前, 应对引理 3.3.2 仔细考察. 在引理中用到等式

$$\Omega\equiv(\Omega_{ij})=\sum_{s=1}^{l}2\pi u_s(\theta_{2s-1,2s}-\theta_{2s,2s-1}), \qquad (**)$$

此等式不能按常规理解. 等式左端的 Ω 是微分式矩阵, 而右端是以 $u_1, \cdots, u_l$ 的多项式为元素的矩阵. 从本质上讲, 左端与右端是不同的对象. 如果读者忆起第 1 章 § 1.8 的例子, 那一定知道: 对于 l 个半径为 $r_1, \cdots, r_l$ 的二维球面的乘积空间 $M=S^2(r_1)\times\cdots$

$\times S^2(r_l)$，它的曲率为

$$\Omega \equiv (\Omega_{ij}) = \sum_{s=1}^{l} \frac{1}{r_s^2} \omega_{2s-1} \wedge \omega_{2s} (\theta_{2s-1,2s} - \theta_{2s,2s-1})$$

(参见习题1.8.2)．与等式(**)比较之后，似乎可以得到

$$u_s = \frac{1}{\pi r_s^2} \omega_{2s-1} \wedge \omega_{2s}.$$

注意到 $$u_s^2 \neq 0, \quad \left(\frac{1}{\pi r_s^2} \omega_{2s-1} \wedge \omega_{2s} \right)^2 = 0.$$

所以等式(**)不能按常规理解．根据等式(**)，我们可以把 u_s 看成虚拟的二次微分式．

定义 3.3.4(陈根算法) 在一个包含曲率的算式 $Q_0(\Omega_{ij})$ 中用等式(**)代入，将 Ω_{ij} 换为陈根 $u_1, \cdots, u_l$，然后对含有陈根的式子进行形式计算，最后再按定义 3.3.1，将 $u_1, \cdots, u_l$ 换回到 Ω_{ij}，便得到一个包含 Ω_{ij} 的新算式 $Q_1(\Omega_{ij})$．这种从 Q_0 算出 Q_1 的方法称为陈根算法．

注 3.3.5 陈根算法的极有价值之处在于通常有下列等式成立：

$$Q_0(\Omega_{ij}) = Q_1(\Omega_{ij}).$$

当然这个等式不一定必然成立，即使在成立时也须要另外论证．在第 6 章中证明局部指标定理时，我们用了陈根算法．在那里读者会对陈根算法有一个更具体的认识．

陈根算法为什么会导出正确的结论呢？这是有点奥妙的．但是单从算法上来讲，它和上一节提到的“存在泛示性类”的那个不甚奥妙的想法却是“孪生兄弟”．由于陈根算法中的 $Q_1(\Omega_{ij})$ 必是示性式，因此假定 $Q_0 = Q_1$ 时自然蕴含假定 Q_0 是示性式，换句话说，假定

$Q_0 = CW(L, (P, [\omega]))$（右端是 § 3.2 中的记号）．

对于从一个复杂而冗长的算法求得的 Q_0 而言，采用“存在泛示性类 L”的想法时是选取足够多的简单的 $(P, [\omega])$，算出相应的 Q_0，以定出 L．而采用“陈根算法”则是固定一个特殊的 $(P, [\omega])$，在算出 Q_0 的过程中将曲率换成陈根来算，最后换回到 Q_1（自然地定出 L）．所以说它们是“孪生兄弟”是不过分的．

第 4 章

MP 拟基本解及应用

在第 2 章的 § 2.2 中我们建立热方程的基本解时，曾把 k 级初解的存在性留待本章来证. 因此本章的第一个任务就是着手解决此问题. 证明初解存在的关键是一个 MP 拟基本解的概念. 它是在 1949 年为 Minakshisundaram-Pleijel 引进的一种特殊的拟基本解(参见文献[15]). 事实证明 MP 拟基本解是非常重要的，它不但能给出初解的存在性，而且能建立基本解的渐近展开式，从而给出椭圆算子的局部指标的定义. 本章将对 MP 拟基本解作全面的讨论.

§ 4.1 MP 拟基本解

设 M 是 n 维黎曼流形，E 是 M 上复向量丛，其上带有一个内积和一个容许的联络 D(在引理 3.1.2 的证明中有定义). 由定义 1.5.2, 有 Laplace -Beltrami 算子 Δ_0, 它表为

$$\Delta_0=\sum_{i=1}^{N} D(E_i, E_i): \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

上式中的 $\{E_1, \cdots, E_N\}$ 是向量丛 E 的局部幺正截面基. 又设 $F:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是 $\mathscr{F}(M)$ 线性映射(或称零次线性微分算子), 并且是自伴的. 令

$$\Delta=-(\Delta_0+F),$$

易见它是自伴的 Laplace 型算子. 我们考虑下列的形式幂级数的线性变换族((t, y, ξ)是族参数):

$$H_\infty(t, y, \xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\sum_{i=0}^{\infty} t^i U^{(i)}(\xi, y): E_\xi\to E_y,$$

上式中的 y 属于点 ξ 的单值邻域，$\rho\equiv\rho(y, \xi)$ 是 ξ 至 y 的距离,

$n=\dim M$, $E_y=\pi^{-1}(y)$是丛 E 的纤维, $t>0$ 以及

$$U^{(i)}(\xi, y): E_\xi \to E_y$$

是线性变换. 以下寻求使下述形式幂级数的等式成立的条件:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)H_\infty(t, y, \xi)v=0,$$

其中 ξ 是固定点, $v\in E_\xi$, $H_\infty(t, y, \xi)v$ 是在看成 t 和 y 的函数后再进行上述求导的.

在 ξ 点的单值邻域 O_ξ 内, 选定以 ξ 点为心的法坐标系. 设点 y 有法坐标$(y_1, \cdots, y_n)$, 于是

$$\rho=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}.$$

我们在 O_ξ 上取定一个光滑向量场

$$\hat{\partial}=\sum_{i=1}^{n} y_i\frac{\partial}{\partial y_i},$$

并记
$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j}\right\rangle, \ G=\det(g_{ij}).$$

这时我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}H_\infty(t, y, \xi)v&=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\left\{\left(\frac{\rho^2}{4t^2}-\frac{n}{t}\right)\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi, y)v\right.\\&\quad\left.+\sum_{i=0}^{\infty}it^{i-1}U^{(i)}(\xi, y)v\right\}\\&=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\rho^2}{4t^2}-\frac{n}{2t}+\frac{i}{t}\right)t^iU^{(i)}(\xi, y)v.\end{aligned}$$

接着由第1章定义1.5.2知: 当取 $\Phi(\rho)=\dfrac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}$ 时, 有

$$\begin{aligned}\Delta_0H_\infty(t, y, \xi)v&=(\Delta_0\Phi)\cdot\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi, y)v\right)\\&\quad+2\sum_{\alpha=1}^{n}(E_\alpha\Phi)\cdot\nabla_{E_\alpha}\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi, y)v\right)\\&\quad+\Phi\cdot\Delta_0\left(\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi, y)v\right),\end{aligned}$$

其中$\{E_1, \cdots, E_n\}$是局部幺正标架场. 如果我们取$\{E_1, \cdots, E_n\}$沿着过 ξ 点的测地线平行, 那么由推论1.7.3(高斯引理)和引理

1.7.4, 有

$$E_\alpha\Phi(\rho)=\Phi'(\rho)\cdot E_\alpha\rho=\Phi'(\rho)\cdot\left\langle E_\alpha,\ \frac{\partial}{\partial\rho}\right\rangle$$
$$=\Phi'(\rho)\cdot\left\langle E_\alpha,\ \sum_\beta\frac{y_\beta}{\rho}\ \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right\rangle$$
$$=\Phi'(\rho)\cdot\left\langle E_\alpha,\ \sum_\beta\frac{y_\beta}{\rho}\ E_\beta\right\rangle$$
$$=\Phi'(\rho)\cdot\frac{y_\beta}{\rho}.$$

从而关于 $\Delta_0H_\infty(t,\ y,\ \xi)v$ 等式右端第二项满足

$$2\sum_{\alpha=1}^{n}(E_\alpha\Phi)\cdot\nabla_{E_\alpha}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi,\ y)v\Big)$$
$$=2\Phi'(\rho)\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{y_\alpha}{\rho}\ \nabla_{E_\alpha}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi,\ y)v\Big)$$
$$=2\Phi'(\rho)\nabla_{\frac{\hat{\partial}}{\rho}}\Big(\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi,\ y)v\Big),$$

其中用到　$$\hat{\partial}=\sum_\alpha y_\alpha\ \frac{\partial}{\partial y_\alpha}=\sum_\alpha y_\alpha E_\alpha=\rho\,\frac{\partial}{\partial\rho}.$$

由于

$$\Delta_0\Phi(\rho)=\sum_\alpha\{E_\alpha E_\alpha\Phi(\rho)-(\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)\Phi(\rho)\}$$
$$=\sum_\alpha\{E_\alpha(\Phi'(\rho)\cdot E_\alpha\rho)-\Phi'(\rho)\cdot(\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)\rho\}$$
$$=\sum_\alpha\{\Phi''(\rho)\cdot(E_\alpha\rho)^2+\Phi'(\rho)\cdot E_\alpha E_\alpha\rho$$
$$-\Phi'(\rho)\cdot(\nabla_{E_\alpha}E_\alpha)\rho\}$$
$$=\Phi''(\rho)+\Phi'(\rho)\,\Delta_0\rho,$$

$$\Phi'(\rho)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\Big(-\frac{\rho}{2t}\Big)=\Phi(\rho)\ \Big(-\frac{\rho}{2t}\Big),$$
$$\Phi''(\rho)=\Phi'(\rho)\ \Big(-\frac{\rho}{2t}\Big)+\Phi(\rho)\ \Big(-\frac{1}{2t}\Big)$$
$$=\Phi(\rho)\ \Big(\frac{\rho^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\Big),$$

以及引理 1.7.11, 有

$$\Delta_0\rho=\frac{n-1}{\rho}+\frac{1}{2\sqrt{G}}\cdot\frac{\hat{\partial}}{\rho}\ G,$$

所以 $\Delta_0\Phi(\rho)=\Phi(\rho)\left\{\left(\frac{\rho^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right)-\frac{\rho}{2t}\cdot\frac{n-1+\hat{\partial}\log\sqrt{G}}{\rho}\right\}$,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-(\Delta_0+F)\right)H_\infty(t,y,\xi)$$

$$=\Phi(\rho)\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\left(\frac{\rho^2}{4t^2}-\frac{n}{2t}+\frac{i}{t}\right)-\left[\left(\frac{\rho^2}{4t^2}-\frac{1}{2t}\right)-\frac{n-1+\hat{\partial}\log\sqrt{G}}{2t}\right]-2\left(-\frac{\rho}{2t}\right)\nabla_{\frac{\hat{\partial}}{\rho}}-(\Delta_0+F)\right\}(t^iU^{(i)}(\xi,y)v)$$

$$=\Phi(\rho)\sum_{i=0}^{\infty}\left\{\frac{i}{t}+\frac{1}{t}\cdot\frac{\hat{\partial}G}{4G}+\frac{1}{t}\nabla_{\hat{\partial}}-(\Delta_0+F)\right\}\times(t^iU^{(i)}(\xi,y)v)$$

$$=\Phi(\rho)\left\{\left(\nabla_{\hat{\partial}}+\frac{\hat{\partial}G}{4G}\right)\cdot\frac{1}{t}U^{(0)}(\xi,y)v+\sum_{i=1}^{\infty}t^{i-1}\left[\left(\nabla_{\hat{\partial}}+i+\frac{\hat{\partial}G}{4G}\right)U^{(i)}(\xi,y)v-(\Delta_0+F)U^{(i-1)}(\xi,y)v\right]\right\}.$$

因此上式成立就相当于下列公式成立：

$$\left(\nabla_{\hat{\partial}}+i+\frac{\hat{\partial}G}{4G}\right)U^{(i)}(\xi,y)v=(\Delta_0+F)U^{(i-1)}(\xi,y)v\quad(i=0,1,2,\cdots),$$

其中约定 $U^{(-1)}(\xi,y)\equiv0$. 下面考察上述方程的求解问题.

引理 4.1.1 给定 $v\in E_\xi$, 则关于 $\mathscr{U}^{(i)}(y)\in\Gamma(E|_{O_\xi})(i=0,1,2,\cdots)$的方程

$$\begin{cases}\left(\nabla_{\hat{\partial}}+i+\frac{\hat{\partial}G}{4G}\right)\mathscr{U}^{(i)}(y)=(\Delta_0+F)\mathscr{U}^{(i-1)}(y);\\ \mathscr{U}^{(-1)}(y)\equiv0;\\ \mathscr{U}^{(0)}(\xi)=v.\end{cases}$$

有唯一解, 其中 $E|_{O_\xi}$是从 E 在 ξ 的单值邻域上的限制.

证明 由于

$$\nabla_{\hat{a}}(\rho^i G^{\frac{1}{4}}\mathscr{U}^{(i)})=\Big(\sum_j y_j\frac{\partial}{\partial y_j}\rho^i\Big)\cdot G^{\frac{1}{4}}\cdot\mathscr{U}^{(i)}$$

$$+\rho^i\cdot(\hat{\partial}G^{\frac{1}{4}})\cdot\mathscr{U}^{(i)}+\rho^i\cdot G^{\frac{1}{4}}\cdot\nabla_{\hat{a}}\mathscr{U}^{(i)}$$

$$=\rho^i G^{\frac{1}{4}}\Big(i+\frac{\hat{\partial}G}{4G}+\nabla_{\hat{a}}\Big)\mathscr{U}^{(i)},$$

故方程化为

$$\begin{cases}\nabla_{\hat{a}}(\rho^i G^{\frac{1}{4}}\mathscr{U}^{(i)})=\rho^i G^{\frac{1}{4}}(\Delta_0+F)\mathscr{U}^{(i-1)};\\ \mathscr{U}^{(-1)}\equiv 0;\\ \mathscr{U}^{(0)}(\xi)=v.\end{cases}$$

显然，这个方程有唯一解：

$$\mathscr{U}^{(0)}(y)=G^{-\frac{1}{4}}(y)\cdot /\!/_{\xi}^{y}v,$$

$$\mathscr{U}^{(i)}(y)=\frac{1}{\rho^i G^{\frac{1}{4}}(y)}\int_0^{\rho}t^{i-1}\,G^{\frac{1}{4}}\Big(t\cdot\frac{y}{\rho}\Big)/\!/_{\frac{ty}{\rho}}^{y}(\Delta_0+F)\mathscr{U}^{(i-1)}\Big(\frac{ty}{\rho}\Big)dt$$

$$=\frac{1}{G^{\frac{1}{4}}(y)}\int_0^1 s^{i-1}G^{\frac{1}{4}}(sy)\,/\!/_{sy}^{y}(\Delta_0+F)\mathscr{U}^{(i-1)}(sy)ds$$

$$(i\geqslant 1).$$

从而引理得证（上式中记号 $/\!/_{\xi}^{y}: E_{\xi}\to E_y$ 是沿着连接 ξ 至 y 的测地线所作的平行移动）. ▌

定义 4.1.2 我们把引理 4.1.1 中方程的解 $u^{(i)}(y)$ 记作 $U^{(i)}(\xi, y)v$. 注意到 $\mathscr{U}^{(i)}(y)$ 线性依赖于 v, 即知

$$U^{(i)}(\xi, v): E_{\xi}\to E_y$$

是线性映射. 令

$$H_\infty(t, y, \xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\sum_{i=0}^{\infty}t^i U^{(i)}(\xi, y),$$

并称之为热算子 $\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的 MP 拟基本解.

注 4.1.3 类似于 MP 拟基本解的概念在分析学中早已存在，但是把分析学中的这个概念引进几何学却不很容易，所以我们称之为 MP 拟基本解. 下面介绍 MP 拟基本解的若干应用.

§4.2　初解的存在性

我们截取 MP 拟基本解的一段:

$$H_N(t,\ y,\ \xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\sum_{i=0}^{N}t^iU^{(i)}(\xi,\ y).$$

又取光滑函数

$$\varphi: M\times M\to\mathbf{R},$$

使得

$$\varphi|_{M-D(\varepsilon)}=0,$$

其中 ε 是一个充分小的正常数, $D(\varepsilon)$是对角集的 ε 邻域, 即

$$D(\varepsilon)=\{(y,\ \xi)\in M\times M\,|\,\rho(y,\ \xi)\leqslant\varepsilon\}.$$

于是

$$\varphi(y,\ \xi)H_N(t,\ y,\ \xi):\ E_\xi\to E_y$$

对于任意的$(y,\ \xi)\in M\times M$ 和任意的 $t>0$ 皆有定义.

命题 4.2.1　若令 $G_0(t,\ y,\ \xi)=\varphi(y,\ \xi)H_N(t,\ y,\ \xi)$, 则 $G_0(t,y,\xi)$是热算子$\frac{\partial}{\partial t}-(\Delta_0+F)$的$k=\left[\frac{N}{2}-\frac{n}{4}\right]$级初解; 其中 $N\geqslant\frac{n}{2}$, $\left[\frac{N}{2}-\frac{n}{4}\right]$是数 $\frac{N}{2}-\frac{n}{4}$ 的整数部分.

证明　我们验证 G_0 满足定义 2.2.1 中的条件(i)～(iv). (i)是显然的, 故不用证了. 仿照本章 § 4.1 的计算, 可知

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-(\Delta_0+F)\right)H_N(t,\ y,\ \xi)v$$

$$=-\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi})^n}t^{N-\frac{n}{2}}(\Delta_0+F)U^{(N)}(\xi,\ y)v.$$

由引理 4.1.1 中的 $U^{(N)}(\xi,\ y)$ 的表达式, 知 $U^{(N)}(\xi,\ y)$ 关于 ξ, y 是 C^∞ 的, 故在仔细考虑 $t=0$ 处可微性之后, 即得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-(\Delta_0+F)\right)(\varphi(y,\ \xi)H_N(t,\ y,\ \xi))$$

$$\in C^{\left[\frac{N}{2}-\frac{n}{4}\right]}([0,\ \infty)\times M\times M).$$

从而(ii)成立. 由于

$$\int_M G_0(t, y, \xi)f(\xi, \alpha)d\xi$$

$$=\sum_{i=0}^{N} t^i \int \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\varphi(y, \xi)U^{(i)}(\xi, y)f(\xi, \alpha)d\xi,$$

故为证(iii),我们将分别考虑上式右端各项. 令

$$M_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left\{\xi\in M\,|\,\rho(y, \xi)<\frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

于是右端的任一项可写为

$$t^i\int_M \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\varphi(y, \xi)U^{(i)}(\xi, y)f(\xi, \alpha)d\xi$$

$$=t^i\left\{\int_{M_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} * +\int_{M-M_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} *\right\}.$$

由于在 $M-M_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$中,下列极限一致收敛到零:

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}=0,$$

故

$$\lim_{t\to 0}\int_{M-M_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} * =0,$$

且这个极限对(y, α)是局部一致趋于零(即在(y, α)的一个邻域内是一致的).

取 $(z_1, \cdots, z_n)$ 是 M 上以 y 为中心的法坐标系. 不妨记ξ的法坐标为$(z_1, \cdots, z_n)$, 那么

$$\lim_{t\to 0}\int_{M_y\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)} * =\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}^n_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}\frac{e^{-\frac{|z|^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}U^{(i)}(z, 0)$$

$$\times f(z, \alpha)\sqrt{\det\left(\left\langle\frac{\partial}{\partial z_i}, \frac{\partial}{\partial z_j}\right\rangle\right)}dz$$

$$=\lim_{t\to 0}\int_{\mathbf{R}^n_0\left(\frac{\varepsilon}{4\sqrt{t}}\right)}\frac{e^{-|\beta|^2}}{\pi^{n/2}}U^{(i)}(\sqrt{4t}\beta, 0)$$

$$\times f(\sqrt{4t}\beta, \alpha)\sqrt{\det|_{z=\sqrt{4t}\beta}}\,d\beta.$$

易见上式收敛到

$$U^{(i)}(0,\ 0)f(0,\ \alpha)=U^{(i)}(y,\ y)f(y,\ \alpha),$$

并且关于$(y,\ \alpha)$是局部一致的．至此可见(iii)成立．

(iv)的证明极为冗长．$l=0$ 或 $l=1$ 的情形，可直接由(iii)推得．对于一般的 l，我们用归纳法来证：设

$g(t,\ x,\ y,\ \alpha)\in C^{l+1}([0,\ \infty)\times M\times M\times N)$，$g(t,\ x,\ y,\ \alpha)\in E_x$，

我们要证

$$W(t,\ x,\ \alpha)=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}d\tau\int_M G_0(t-\tau,\ x,\ y)g(\tau,\ x,\ y,\ \alpha)dy$$

$$\in C^{\left[\frac{l+1}{2}\right]}([0,\ \infty)\times M\times N),$$

换句话说，是要证明下列的(1)与(2)：

(1) $\nabla_X W(t,\ x,\ \alpha)\in C^{\left[\frac{l+1}{2}\right]-1}([0,\ \infty)\times M\times N)$，

其中 X 是 M 上一个 C^∞ 向量场．

(2) $\dfrac{\partial}{\partial t}W(t,\ x,\ \alpha)\in C^{\left[\frac{l+1}{2}\right]-1}([0,\ \infty)\times M\times N)$.

考虑到

$$G_0(t,\ y,\ \xi)=\varphi(y,\ z)H_N(t,\ y,\ \xi)$$

$$=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\Psi_N(t,\ y,\ \xi),$$

其中

$$\Psi_N(t,\ y,\ \xi)=\varphi(y,\ \xi)\sum_{i=0}^{N}t^iU^{(i)}(\xi,\ y),$$

因此(1)等价于下列(1')：

(1') $\nabla_X\widetilde{W}(t,\ x,\alpha)\in C^{\left[\frac{l+1}{2}\right]-1}([0,\ \infty)\times M\times N)$，

其中 $\widetilde{W}(t,\ x,\ \alpha)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon}d\tau\int_M\left[\dfrac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\right]\tilde{g}(\tau,\ x,\ y,\ \alpha)dy$，

$\tilde{g}(t,\ x,\ y,\ \alpha)\in C^{l+1}([0,\ \infty)\times M\times M\times N)$，$\tilde{g}(t,\ x,\ y,\ \alpha)\in E_x$，

并且当 $\rho(x,\ y)>\varepsilon$ 时，$\tilde{g}(t,\ x,\ y,\ \alpha)=0$．

令

$$\Phi(t,\ x,\ y)=\frac{e^{-\frac{\rho(x,\ y)^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n},$$

于是

$$\nabla_X \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M \Phi(t-\tau, x, y)\tilde{g}(\tau, x, y, \alpha) dy$$
$$= \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M (\nabla_X \Phi(t-\tau, x, y))\tilde{g}(\tau, x, y, \alpha) dy$$
$$+ \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M \Phi(t-\tau, x, y)(\nabla_X \tilde{g}(\tau, x, y, \alpha)) dy.$$

由归纳知 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M \Phi(t-\tau, x, y)(\nabla_X \tilde{g}(\tau, x, y, \alpha)) dy$

存在并且属于

$$C^{\left[\frac{l}{2}\right]}([0, \infty)\times M\times N)\subset C^{\left[\frac{l+1}{2}\right]-1}([0, \infty)\times M\times N).$$

现在验证

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M (\nabla_X \Phi(t-\tau, x, y))\tilde{g}(\tau, x, y, \alpha) dy$$
$$\in C^{\left[\frac{l+1}{2}\right]-1}([0, \infty)\times M\times N).$$

这个验证的关键基于：$\Phi(t, x, y)$有具体的表达式. 假若这里的Φ没有上述具体的表达式，我们就不知道对Φ的奇性该加什么样的条件以保证位势积分$\widetilde{W}_l$具有要证的性质. 有了具体的表达式，便可以用高斯引理将对于Φ作关于x的微商转化为关于y的微商，以后再用散度定理将对于Φ作关于y的微商转化为对于$\tilde{g}$作微商，从而可根据归纳假设完成上述的验证. 具体证法如下：

在M上固定一点x，对于x的单值邻域内的任意一点y，有唯一的一条测地线连接x至y. 令沿着这条测地线的平行移动为

$$/\!/_x^y: T_xM\to T_yM.$$

对于$X(x)\in T_xM$，令

$$Y(y) = /\!/_x^y X(x).$$

采用第1章§1.7中的记号，$\rho(x, y)$是x至y的距离，$\left.\dfrac{\partial}{\partial\rho(x, \ )}\right|_y$是连$x$至$y$的测地线在$y$点处的单位切向量. 类似地有$\left.\dfrac{\partial}{\partial\rho(\ ,y)}\right|_x$.

显然有

$$\frac{\partial}{\partial\rho(x,\ )}\Big|_y = -/\!/_x^y \frac{\partial}{\partial\rho(\ ,y)}\Big|_x.$$

由高斯引理(推论1.7.3)有

$$Y(y)\rho(x,\ )=\left\langle Y(y), \frac{\partial}{\partial\rho(x,\ )}\Big|_y\right\rangle,$$

$$X(x)\rho(\ ,y)=\left\langle X(x), \frac{\partial}{\partial\rho(\ ,y)}\Big|_x\right\rangle.$$

从而

$$\begin{aligned}
Y(y)\rho(x,\ ) &= \left\langle Y(y), \frac{\partial}{\partial\rho(x,\ )}\Big|_y\right\rangle \\
&= \left\langle /\!/_x^y X(x),\ -/\!/_x^y \frac{\partial}{\partial\rho(\ ,y)}\Big|_x\right\rangle \\
&= -\left\langle X(x), \frac{\partial}{\partial\rho(\ ,y)}\Big|_x\right\rangle \\
&= -X(x)\rho(\ ,y).
\end{aligned}$$

有时把上式记为

$$Y(y)\rho(x,y)=-X(x)\rho(x,y).$$

现在考虑

$$\begin{aligned}
I &\equiv \int_0^{t-s} d\tau \int_M (\nabla_X\Phi(t-\tau,x,y))\cdot\tilde g(\tau,x,y,\alpha)dy \\
&= \int_0^{t-s} d\tau \int_M (X(x)\Phi(t-\tau,x,y))\cdot\tilde g(\tau,x,y,\alpha)dy \\
&= -\int_0^{t-s} d\tau \int_M (Y(y)\Phi(t-\tau,x,y))\cdot\tilde g(\tau,x,y,\alpha)dy.
\end{aligned}$$

对于固定的$x\in M$, 在E_x中取基$\{e_1(x), \cdots, e_N(x)\}$, 于是便有

$$\tilde g(\tau,x,y,\alpha)=\sum_{i=1}^N \tilde g_i(\tau,x,y,\alpha)e_i(x),$$

其中$\tilde g_i(\tau,x,y,\alpha)$是定义在$[0,\infty)\times M\times M\times N$上的函数. 此时有

$$\begin{aligned}
I = -\int_0^{t-s} d\tau \int_M &(Y(y)\Phi(t-\tau,x,y)) \\
&\times\left(\sum_{i=1}^N \tilde g_i(\tau,x,y,\alpha)e_i(x)\right)dy
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{i=1}^{N}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M Y(y)(\Phi(t-\tau, x, y)$$
$$\times \tilde{g}_i(\tau, x, y, \alpha))e_i(x)dy$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M \Phi(t-\tau, x, y)$$
$$\times Y(y)\tilde{g}_i(\tau, x, y, \alpha)e_i(x)dy.$$

利用后面的散度定理 4.2.2, 知

$$I = \sum_{i=1}^{N}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M \Phi(t-\tau, x, y)$$
$$\times [(\mathrm{div}Y)\cdot\tilde{g}_i + Y\tilde{g}_i]e_i(x)dy.$$

易知

$$(\mathrm{div}Y)\cdot\tilde{g}_i + Y\tilde{g}_i \in C^l([0, \infty)\times M\times M\times N),$$

故由归纳假设得

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I \in C^{\left[\frac{l}{2}\right]}([0, \infty)\times M\times N) \subset C^{\left[\frac{l+1}{2}\right]-1}([0, \infty)\times M\times N).$$

这样便证明了(1′)或(1). 现在考虑

$$\frac{\partial}{\partial t} W(t, x, \alpha) = \frac{\partial}{\partial t}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau$$
$$\times \int_M G_0(t-\tau, x, y) g(\tau, x, y, \alpha)dy$$

的可微性. 由于

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M G_0(t-\tau, x, y) g(\tau, x, y, \alpha)\, dy$$
$$= \int_M G_0(\varepsilon, x, y) g(t-\varepsilon, x, y, \alpha)dy$$
$$+\int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M \left[\frac{\partial}{\partial t} G_0(t-\tau, x, y)\right]\cdot g(\tau, x, y, \alpha)dy$$
$$= \mathrm{II} + \mathrm{III} + \mathrm{IV}.$$

其中
$$II = \int_M G_0(\varepsilon, x, y) g(t-\varepsilon, x, y, \alpha)dy,$$
$$III = \int_0^{t-\varepsilon} d\tau \int_M \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_0 - F\right) G_0(t-\tau, x, y)\right]$$
$$\times g(\tau, x, y, \alpha)dy,$$

$$\mathrm{IV}=\int_0^{t-\varepsilon}d\tau\int_M[(\Delta_0+F)G_0(t-\tau,x,y)]\cdot g(\tau,x,y,\alpha)dy.$$

显然有 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathrm{II}=g(t,x,x,\alpha)\in C^{[\frac{l+1}{2}]-1}([0,\infty)\times M\times N)$.

由(ii)推知 $\left[\dfrac{\partial}{\partial t}-(\Delta_0+F)\right]G_0\in C^k([0,\infty)\times M\times M)$,

从而 $\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathrm{III}\in C^{[\frac{l+1}{2}]-1}([0,\infty)\times M\times N)$.

最后借用两次前面关于 $\nabla_X W$ 的可微性的讨论, 得到

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to0}\mathrm{IV}&\in C^{[\frac{l+1-2}{2}]}([0,\infty)\times M\times N)\\&\subset C^{[\frac{l+1}{2}]-1}([0,\infty)\times M\times N),\end{aligned}$$

所以 $\dfrac{\partial}{\partial t}W(t,x,\alpha)\in C^{[\frac{l+1}{2}]-1}([0,\infty)\times M\times N)$.

至此我们便证得了(iv). 从而命题 4.2.1 证毕. ∎

定理 4.2.2(**散度定理**) 设 M 是紧致无边黎曼流形, Y 是 M 上一个向量场, $g: M\to\mathbf{R}$ 是一个可微函数, 则

$$\int_M(Yg)dv=-\int_M(\mathrm{div}Y)\cdot g dv,$$

其中 dv 是 M 上黎曼测度, $\mathrm{div}\,Y$ 是 Y 的散度.

证明 关于流形上的积分与散度的概念, 请参阅文献[22]中的 §11. 本书习题 1.6.7 中有散度的另一定义. 设$\{E_1,\cdots,E_n\}$是 M 的一个局部幺正标架场, 则

$$\mathrm{div}Y=\sum_{i=1}^n\langle\nabla_{E_i}Y,E_i\rangle,$$

其中 ∇ 是 Levi-Civita 联络. 由于

$$\begin{aligned}\mathrm{div}(gY)&=\sum_{i=1}^n\langle\nabla_{E_i}(gY),E_i\rangle\\&=\sum_{i=1}^n\langle Y,E_i\rangle(E_ig)+\sum_{i=1}^n g\langle\nabla_{E_i}Y,E_i\rangle\\&=Yg+g\cdot\mathrm{div}(Y),\end{aligned}$$

上式积分后, 利用文献[22]中第 199 页习题 2, 立即得到定理的证明. ∎

§4.3 热核的渐近展开

MP拟基本解的第二个应用是导出下列的热核渐近展开定理.

定理 4.3.1(**渐近展开定理**) 设 M 是 n 维黎曼流形, E 是 M 上的一复向量丛并带有内积与相容的联络. 令 $\Delta=-(\Delta_0+F)$ 定义如前, 又令 $G(t, x, y)$ 是热算子 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的基本解, 形式幂级数

$$H_\infty(t, y, \xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n}\sum_{i=0}^{\infty}t^iU^{(i)}(\xi, y)$$

是 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的 MP 拟基本解(见定义 4.1.2). 于是当 $t\to 0$ 时, $G(t, \xi, \xi)$ 有下列渐近展开:

$$G(t, \xi, \xi)\sim H_\infty(t, \xi, \xi),\quad 当\ t\to 0\ 时.$$

上述渐近展开的含意是指: 对于任意 $N\geqslant 0$, 有

$$G(t, \xi, \xi)-\frac{1}{(\sqrt{4\pi})^n}\sum_{i=1}^{N}t^{i-\frac{n}{2}}U^{(i)}(\xi, \xi)=o(t^{N-\frac{n}{2}}).$$

证明 只须对一切充分大的 N 来证明上述等式就行了. 和前面一样, 令

$$G_0(t, y, \xi)=\varphi(y, \xi)\cdot H_N(y, \xi).$$

由命题 4.2.1 和定理 2.2.3 知: 从 G_0 出发用 Levi 算法求出的 G 就是基本解. 下面我们仔细考察 Levi 算法以估计

$$|G(t, \xi, \xi)-G_0(t, \xi, \xi)|.$$

只要能估出下列等式

$$|G(t, \xi, \xi)-G_0(t, \xi, \xi)|=o(t^{N-\frac{n}{2}}),$$

则定理 4.3.1 便得证了. 设 T 是一个正常数, 易知存在一个常数 A, 使得对任意的 $t\in(0, T]$, 有

$$|K_0(t, y, \xi)|\equiv\left|\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta\right)G_0(t, y, \xi)\right|\leqslant A\cdot t^{N-\frac{n}{2}}.$$

于是仿照引理 2.2.2 的证明, 有

$$|K_1(t, y, \xi)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_M |K_0(t-\tau, y, z)| \cdot |K_0(\tau, z, \xi)| dz$$

$$\leqslant \int_0^t d\tau [A^2 (t-\tau)^{N-\frac{n}{2}} \cdot \tau^{N-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{vol}(M)]$$

$$\leqslant \int_0^t d\tau [A^2 T^{N-\frac{n}{2}} \cdot \tau^{N-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{vol}(M)]$$

$$\leqslant A \cdot B \cdot \frac{t^{N-\frac{n}{2}+1}}{\left(N-\frac{n}{2}+1\right)},$$

其中 $$B = A \cdot T^{N-\frac{n}{2}} \cdot \mathrm{vol}(M).$$

$$|K_2(t, y, \xi)| \leqslant \int_0^t d\tau \int_M |K_0(t-\tau, y, z)| \cdot |K_1(\tau, z, \xi)| dz$$

$$\leqslant \int_0^t d\tau \int_M A \cdot T^{N-\frac{n}{2}} \cdot A \cdot B \cdot \frac{t^{N-\frac{n}{2}+1}}{\left(N-\frac{n}{2}+1\right)} dz$$

$$\leqslant A \cdot B^2 \cdot \frac{t^{N-\frac{n}{2}+2}}{\left(N-\frac{n}{2}+1\right)\left(N-\frac{n}{2}+2\right)},$$

…………

$$|K_m(t, y, \xi)|$$

$$\leqslant A \cdot B^m \frac{t^{N-\frac{n}{2}+m}}{\left(N-\frac{n}{2}+1\right)\left(N-\frac{n}{2}+2\right) \cdots \left(N-\frac{n}{2}+m\right)}.$$

于是

$$|\overline{K}(t, y, \xi)| \leqslant \sum_{m=0}^{\infty} |K_m(t, y, \xi)|$$

$$\leqslant A \cdot e^{Bt} \cdot t^{N-\frac{n}{2}}.$$

levi 算法给出了下列等式:

$$|G(t, y, \xi) - G_0(t, y, \xi)|$$

$$= \left| \int_0^t d\tau \int_M G_0(t-\tau, y, z) \overline{K}(\tau, z, \xi) dz \right|,$$

从而导出

$$|G(t,y,\xi)-G_0(t,y,\xi)|\leqslant \text{常数}\cdot t^{N-\frac{n}{2}+1},$$

于是定理 4.3.1 得证. ▌

注 4.3.2　多留意一下渐近展开定理的含意是有意义的. 我们知道热方程的解算子(参见引理 2.4.1):

$$T_t: \Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

是整体性算子, 即对于任意的 $\varphi\in\Gamma(E)$ 及 $x\in M$, $(T_t\varphi)(x)$ 不能由 φ 在 x 附近的性质所决定. 这使得 T_t 的核 $G(t,x,y)$ 也具有整体性质. 事实上, $G(t,x,y)$ 的整体性质还有更进一步的表现. 如果 U 是 M 的一个邻域, 对于 $y,\xi\in U$, 易知

$$G(t,y,\xi),\quad t>0,$$

不能由 U 中的黎曼度量完全决定. 可是 MP 拟基本解 $H_\infty(t,y,\xi)$ 就不一样了. 当 U 是 ξ 的一个法坐标邻域时, $H_\infty(t,y,\xi)$ 就可以从 U 中的黎曼结构算出来. 由此可见, 渐近展开定理是沟通整体研究与局部研究的一座桥梁.

§4.4　椭圆算子的局部指标

在第 2 章 §2.6 中我们介绍了椭圆算子指标的概念. 这个概念产生的基础是 Hodge 定理. 确切地讲是定理 2.4.8(i). 假若我们用 Hodge 定理及定理 2.4.2 进一步来考察指标这个概念, 还可以得到指标的一些别的表达式.

设 $D: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$ 是一个椭圆算子, 令

$$D^*: \Gamma(F)\to\Gamma(E)$$

是它的伴随算子. 考虑

$$D^*D: \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$
$$DD^*: \Gamma(F)\to\Gamma(F).$$

易见它们都是自伴算子, 而且特征值皆是非负实数. 令

$$\left.\begin{aligned}\Gamma_\lambda(E)&=\{\varphi\in\Gamma(E)\mid D^*D\varphi=\lambda\varphi\},\\ \Gamma_\lambda(F)&=\{\psi\in\Gamma(F)\mid DD^*\psi=\lambda\psi\},\end{aligned}\right.\quad(\lambda\in\mathbf{R}).$$

引理 4.4.1 记号同上，则

(i) $\Gamma_0(E)=\ker\{D: \Gamma(E)\to\Gamma(F)\}$,

$\Gamma_0(F)=\ker\{D^*: \Gamma(F)\to\Gamma(E)\}$;

(ii) 对于任意的 $\lambda>0$，有

$$\dim \Gamma_\lambda(E)=\dim \Gamma_\lambda(F)<+\infty.$$

证明 仿照引理 2.5.1 的证明可证得(i). 考察映射

$$D: \Gamma_\lambda(E)\to\Gamma(F),$$

易知此映射可限制为

$$D: \Gamma_\lambda(E)\to\Gamma_\lambda(F),$$

并且当 $\lambda>0$ 时，它有逆映射

$$\frac{1}{\lambda}D^*: \Gamma_\lambda(F)\to\Gamma_\lambda(E).$$

于是(ii)得证. 引理证毕. ∎

利用引理 4.4.1，可以得到 $\operatorname{ind}(D)$ 的不同表达式如下：

$$\begin{aligned}\operatorname{ind}(D)&=\dim\ker D-\dim\ker D^*\\&=\dim\Gamma_0(E)-\dim\Gamma_0(F)\\&=\sum_{i=1}^{N}f(\lambda_i)(\dim\Gamma_{\lambda_i}(E)-\dim\Gamma_{\lambda_i}(F))\\&=\sum_{i=1}^{\infty}f(\lambda_i)(\dim\Gamma_{\lambda_i}(E)-\dim\Gamma_{\lambda_i}(F)),\end{aligned}$$

其中 f 是定义在 $[0,\infty)$ 上的函数，满足 $f(0)=1$，式中的 $\lambda_1=0$ 及 $0<\lambda_2<\lambda_3<\cdots\to\infty$ 是 D^*D(或 DD^*)的所有特征值.

注 4.4.2 假若 $\Gamma(E)$ 是有限维向量空间，$D^*D: \Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 就是有限维向量空间中的线性变换，从而上面 $\operatorname{ind}(D)$ 的最后一个表达式中的

$$\sum_{i\geq1}f(\lambda_i)\dim\Gamma_{\lambda_i}(E)=\operatorname{tr}f(D^*D),$$

其中 $f(D^*D)$ 是可以合理定义的 $\Gamma(E)$ 上的线性变换，tr 是迹算子. 因此在 $\Gamma(E)$ 与 $\Gamma(F)$ 皆是有限维的假设下，可知

$$\operatorname{ind}(D)=\operatorname{tr}f(D^*D)-\operatorname{tr}f(DD^*).$$

上述 $\operatorname{ind}(D)$ 的表达式形式上是十分美好的. 可是由于在我们的

问题中

$$\dim \Gamma(E)=\dim(F)=\infty,$$

因此这个十分美好的表达式需要解释和论证. 为此需要处理三个问题:

(i) 如何定义算子 $f(D^*D)$?

(ii) 如何定义算子 $f(D^*D)$的迹? 对 f 加什么条件可以保证迹 $\operatorname{tr} f(D^*D)$的存在?

(iii) 如何证明

$$\operatorname{ind}(D)=\operatorname{tr} f(D^*D)-\operatorname{tr} f(DD^*)?$$

实际上, 主要是要合理地处理(i), 以保证(ii)、(iii)有正面的解答. 下面我们就一个具体的 f 来处理(i). 对于一个固定的 $t>0$, 令

$$f(x)=e^{-tx},$$

其中 $x\in[0,\infty)$. 显见 $f(0)=1$. 初步设想, $f(D^*D)$可有三种方式定义.

(1) 令

$$f(D^*D)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}(-tD^*D)^m;$$

(2) 关于椭圆算子

$$D^*D: \Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

的特征展开定理(定理 2.4.2)表明

$$\overline{\Gamma(E)}=\bigoplus_i \Gamma_{\lambda_i}(E).$$

于是定义

$$f(D^*D): \overline{\Gamma(E)}\to\overline{\Gamma(E)},$$

使得 $f(D^*D)|_{\Gamma_{\lambda_i}(E)}=f(\lambda_i)I_i: \Gamma_{\lambda_i}(E)\to\overline{\Gamma(E)}$, $(\forall i\geq 1)$,

其中

$$I_i: \Gamma_{\lambda_i}(E)\to\overline{\Gamma(E)}$$

是自然嵌入.

(3) 令 $f(D^*D)$是引理 2.4.1 中的 T_t, 只不过在定义 T_t 时的 Δ 设为 D^*D.

在上面三个定义中, 第一个定义是应该否定的, 这是因为没有办法说清关于 m 求和的收敛性问题, 同时若认为收敛性已解决,

则得到的算子 $f(D^*D)$ 只能是局部算子，在这一点上它与第二、三种定义不可能协调起来. 第二个定义是直观并易理解的. 但我们无法从这个定义来了解算子 $f(D^*D)$ 的性质，特别地，无法判断迹 $\operatorname{tr} f(D^*D)$ 是否存在，虽然这个定义在作形式推理时可能是极方便的. 经常有人谈论硬数学与软数学，它们的差别恐怕表现在各自对待问题求解的态度上. 前者需要有相当正则性的解，而后者通常满足于广义解，或只用个别泛函大定理得到的解. 照这种标准来看，$f(D^*D)$ 的第二定义极易落入软数学的范畴. 第三个定义是有实用价值的定义. 由于有热方程求解理论为后盾，这个定义属硬数学范畴. 由此容易解答前面提到的问题(ii)与(iii)，由定理2.4.2(iii)也可知第三个定义与第二个定义是一致的(见下列引理4.4.3).

引理 4.4.3 设 T_t 是引理 2.4.1 中出现的算子，当将它扩充为 $\overline{\Gamma(E)}$ 上的算子时，有

$$T_t = e^{-t(D^*D)}: \overline{\Gamma(E)} \to \overline{\Gamma(E)},$$

其中 $e^{-t(D^*D)}$ 是按注 4.4.2 中第二个方式定义的 $f(D^*D)$.

自此以后我们把 T_t 记为 $e^{-t\Delta}$. 希望读者认识到：现在的 $e^{-t\Delta}$ 是按第三定义理解的，它和第一定义的式子

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-t)^m}{m!} \Delta^m$$

无共同之处. 根据定理 2.3.1，算子 $e^{-t\Delta}$ 是积分算子，它的积分核是 $G(t, x, y)$. 换句话说

$$(e^{-t\Delta}\varphi)(x) = \int_M G(t, x, y)\varphi(y)dy.$$

定义 4.4.4 设 M 是黎曼流形；E 是 M 上的具有度量及容许联络的向量丛；Δ_0: $\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是 Laplace-Beltrami 算子；F: $\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是 $\mathscr{F}(M)$ 线性映射并且还设 $\Delta \equiv -(\Delta_0+F)$ 是自伴且正定的. 对于任意的 x、$y\in M$，选定纤维 E_x、E_y 上的幺正基 $\{e_1(x), \cdots, e_N(x)\}$ 和 $\{E_1(y), \cdots, E_N(y)\}$. 令

$$|G_t|^2(x, y) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{N} \langle G(t, x, y)E_\alpha(y), e_\beta(x)\rangle^2.$$

当验证 $|G_t|^2(x, y)$的定义与 $\{e_1(x), \cdots, e_N(x)\}$、$\{E_1(y), \cdots, E_N(y)\}$的选取无关之后，我们称 $M\times M$ 上的函数$|G_t|=\sqrt{|G_t|^2}$为核函数 $G(t, x, y)$的模.

习题 4.4.5 请写下定义 4.4.4 中提到的关于$|G_t|^2(x, y)$的验证.

命题 4.4.6 记号同前，则

(i) $\iint\limits_{M\times M}|G_t|^2(x, y)dx\,dy<+\infty,\quad \forall t>0;$

(ii) 令 $0\leqslant\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots$ 是 Δ 的所有特征值（重数为m的特征值出现m次），于是

$$\sum_{i=1}^{\infty}e^{-t\lambda_i}<+\infty.$$

证明 从前面构造出的MP拟基本解出发，经过Levi迭代得到 $G(t, x, y)$. 容易看出这个 $G(t, x, y)$满足(i)，故在此就不多述了. 现在我们将从(i)推出(ii). 对于任意的 $v\in E_y$, $t>0$, 由于 $G(t, x, y)v$ 平方可积，故由 Parseval 等式有

$$\int_M|G(t, x, y)v|^2dx=\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_M\langle G(t, x, y)v,\ \varphi_i(x)\rangle dx\right)^2.$$

按照定理 2.4.4 的证明，有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\left(\int_M\langle G(t, x, y)v,\ \varphi_i(x)\rangle dx\right)^2&=\sum_{i=1}^{\infty}(f_i(t, y, v))^2\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(k_i(y, v)e^{-\lambda_i t})^2\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(k_i(y)v\cdot e^{-\lambda_i t})^2\\&=\sum_{i=1}^{\infty}(\langle\varphi_i(y),\ v\rangle e^{-\lambda_i t})^2\\&=\sum_{i=1}^{\infty}\langle\varphi_i(y),\ v\rangle^2e^{-2\lambda_i t}.\end{aligned}$$

令 $v=E_\alpha(y)$，而后将上式对α求和得：

$$\sum_{\alpha=1}^{N}\int_M|G(t, x, y)E_\alpha(y)|^2dx$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}\langle\varphi_i(y),\ E_\alpha(y)\rangle^2 e^{-2\lambda_i t}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{\alpha=1}^{N}\langle\varphi_i(y),\ E_\alpha(y)\rangle^2 e^{-2\lambda_i t}$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\langle\varphi_i(y),\ \varphi_i(y)\rangle^2\cdot e^{-2\lambda_i t}.$$

于是对于任意的 m, 有

$$\sum_{i=1}^{m} e^{-2\lambda_i t}=\sum_{i=1}^{m}\int_M\langle\varphi_i(y),\ \varphi_i(y)\rangle^2 e^{-2\lambda_i t}dy$$

$$\leqslant\int_M\sum_{i=1}^{\infty}\langle\varphi_i(y),\ \varphi_i(y)\rangle^2 e^{-2\lambda_i t}dy$$

$$=\int_M dy\int_M\sum_{\alpha=1}^{N}|G(t,\ x,\ y)E_\alpha(y)|^2dx$$

$$=\int_M dy\int_M\sum_{\alpha,\beta=1}^{N}\langle G(t,\ x,\ y)E_\alpha(y),\ e_\beta(x)\rangle^2dx$$

$$=\int_M dy\int_M|G_t|^2(x,\ y)dx$$

$$=\iint\limits_{M\times M}|G_t|^2(x,\ y)dx\,dy<+\infty.$$

命题证毕. ▌

算子 $T_t\equiv e^{-t\Delta}$ 的迹定义为

$$\mathrm{tr}(e^{-t\Delta})=\sum_{i=1}^{\infty}\langle\langle e^{-t\Delta}\varphi_i,\ \varphi_i\rangle\rangle=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-t\lambda_i},$$

命题 4.4.6 保证 $\mathrm{tr}(e^{-t\Delta})$ 的定义的合理性, 也就是断言算子 $e^{-t\Delta}$ 是迹算子.

命题 4.4.7 记号同前, 则对 $t>0$, 有

$$\int_M\mathrm{tr}\ G(t,\ x,x)dx=\mathrm{tr}(e^{-t\Delta}).$$

证明 由于定理 2.4.4,

$$\mathrm{tr}\,G(t,\ x,\ x)=\sum_{\alpha=1}^{N}\langle G(t,\ x,\ x)e_\alpha(x),\ e_\alpha(x)\rangle$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N}\left\langle\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}\langle\varphi_i(x),\ e_\alpha(x)\rangle\varphi_i(x),\ e_\alpha(x)\right\rangle$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{N}\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}\langle\varphi_i(x),\ e_\alpha(x)\rangle^2$$

$$=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}\langle\varphi_i(x),\ \varphi_i(x)\rangle,$$

从而
$$\int_M \operatorname{tr} G(t,\ x,\ x)dx=\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\lambda_i t}=\operatorname{tr} e^{-t\Delta}.$$

命题证毕. ∎

注 4.4.8 我们继续前面关于 ind(D) 的表达式讨论. 由于命题 4.4.7,

$$\operatorname{ind}(D)=\operatorname{tr}e^{-tD^*D}-\operatorname{tr}e^{-tDD^*}$$
$$=\int_M \operatorname{tr}G_+(t,\ x,\ x)dx-\int_M \operatorname{tr}G_-(t,\ x,\ x)dx,$$

其中 $G_+(t,\ x,\ y)$ 和 $G_-(t,\ x,\ y)$ 分别是热算子 $\frac{\partial}{\partial t}+D^*D$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}+DD^*$ 的基本解. 由定理 4.3.1 知: $G_+(t,\ x,\ y)$与 $G_-(t,\ x,\ y)$有渐近展开式. 设它们的渐近展开式是

$$G_\pm(t,\ x,\ x)\sim H_\infty^\pm(t,\ x,\ x)=\frac{1}{(\sqrt{4\pi})^n}\sum_{i=0}^{\infty}t^{i-\frac{n}{2}}U_\pm^{(i)}(x,\ x).$$

至此不难得到 ind(D)的一个新的表达式:

$$\operatorname{ind}(D)=\int_M\frac{1}{(\sqrt{4\pi})^n}(\operatorname{tr}U_+^{(\frac{n}{2})}-\operatorname{tr}U_-^{(\frac{n}{2})})(x,\ x)dx$$

(上式在 n 为奇数时也成立). 因此有下列定义:

定义 4.4.9 设 M 是 n 维黎曼流形; E、F 是 M 上具有度量及容许联络的向量丛;

$$D: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$$

是一个椭圆算子, 使得 D^*D 和 DD^* 皆是 Laplace 型算子, 则令

$$(\operatorname{loc.ind}(D))(x)=\begin{cases}\frac{1}{(\sqrt{4\pi})^n}\left(\operatorname{tr}U_+^{(\frac{n}{2})}(x,x)-\operatorname{tr}U_-^{(\frac{n}{2})}(x,x)\right), & \text{当 } n=\text{偶数};\\ 0, & \text{当 } n=\text{奇数},\end{cases}$$

并称函数 loc.ind(D)是算子 D 的局部指标.

注 4.4.10 由注 4.4.8 知

$$\operatorname{ind}(D)=\int_M \operatorname{loc.ind}(D)dx.$$

另外，从 MP 拟基本解的构造可知：函数值$(\operatorname{loc.ind}(D))(x)$只和算子 D 在 x 点附近的信息有关，而 $\operatorname{ind}(D)$却是一个和整体信息有关的几何量．这就表明了为什么要把 $\operatorname{loc.ind}(D)$称为"局部指标"．我们已知道

$$\operatorname{ind}(D)=\int_M (\operatorname{tr} G_+(t, x, x)-\operatorname{tr} G_-(t, x, x))dx,$$

在 $t>0$ 时， $(\operatorname{tr} G_+(t, x, x)-\operatorname{tr} G_-(t, x, x))$

是与算子 D 的整体信息有关的量，而且当 $t\to 0$ 时，它是否有极限也很成问题．这反衬出采用定义 4.4.9 的原因．

Mckean-Singer 问题 对于什么样的一阶椭圆算子 $D: \Gamma(E)\to\Gamma(F)$，下列(i)与(ii)是否成立？

(i) $\lim\limits_{t\to 0}(\operatorname{tr} G_+(t, x, x)-\operatorname{tr} G_-(t, x, x))$ 存在（一旦这个极限存在，则易见它等于 $\operatorname{loc.ind}(D)$）．

(ii) $\operatorname{loc.ind}(D)$是一个示性密度．

注 4.4.11 在 Mckean-Singer 问题中提到的示性密度是指：它是一个函数

$$f: M\to \mathbb{C},$$

使得有一个示性式（见定义 3.1.10）

$$\alpha\in \mathrm{CHF}(M)\subset \Lambda^*(M)\otimes\mathbb{C},$$

使下列等式成立：

$$f=*\alpha,$$

其中 Hodge * 同态 * 依赖的定向是 M 在各个局部上适当选出的一些定向．

容易看出，Mckean-Singer 问题中的(i)等价于下列的

(i)′ $\operatorname{tr} U_+^{(i)}(x, x)-\operatorname{tr} U_-^{(i)}(x, x)=0,\ \forall i<\frac{n}{2}.$

Mckean-Singer 问题来自一篇著名的文章[12]．在那篇文章中，Mckean-Singer 讨论了二维黎曼流形上的 de Rham-Hodge

算子，证明了它是上述 Mckean-Singer 问题的一个解. 于是他们很自然地猜想几何上一些著名的椭圆算子皆是 Mckean-Singer 问题的解. 这也称为 Mckean-Singer 猜想. 1971 年 Patodi 发表了两篇文章[16],[17]，证明了 de Rham-Hodge 算子，Riemann-Roch 算子的 Mckean-Singer 猜想. 由于在 Mckean-Singer 猜想成立的情况下，经过积分便得到所讨论算子的 Atiyah-Singer 指标公式，故人们又称 Patodi 证明了 de Rham-Hodge 算子和 Riemann-Roch 算子的局部指标定理. 1973 年文章[9] 声称证明了 Signature 算子的局部指标定理，并且文献[1]在肯定文章[9]的同时，对不变量论证部分给出一个精彩的改写. 但是 20 年之后，在文献[25]中指出了上述两篇文章还没有写明白，因为他们忽略了验证一个事实，这个验证肯定不是容易的，并且它是否一定比证明 Signature 算子的局部指标定理本身容易，暂时难以判断(参阅文献[26]). 迄今为止，还有一个关于 Signature 算子的局部指标定理的完整证明，那就是文献[24]. 本书的第 6 章的一部分就是按照那篇文章写的.

1980 年以来，许多物理、数学家们讨论了 Dirac 算子的局部指标定理. 我们可以从文献 [9] 中第 165 页了解到一些这方面的情况. 局部指标定理的技术扩展到椭圆算子族、有边流形上的椭圆算子、不动点论、Morse 不等式等数学专题及理论物理学相关研究方面，构成了世界性的研究热潮，蔚为壮观.

第5章

Clifford 代数与超代数

在几何学中有一些著名的一阶椭圆算子，例如我们介绍过的 deRham-Hodge 算子、Signature 算子及以后要介绍的 Dirac 算子、Riemann-Roch 算子等. 在它们的构成中皆包含着一种 Clifford 代数的作用. 确切地讲，这些算子的主项(见定义 1.5.11) a_1 中包含了 Clifford 代数的作用. 另外，在讨论 loc.ind(D)时，需要处理关于$(\mathrm{tr}\,U_+ - \mathrm{tr}\,U_-)$等的一些计算. 实际上这是一些超代数中关于超迹函数的计算. 上面讲的两个情形是这一章介绍 Clifford 代数与超代数的主要动机.

§5.1 Clifford 代数

我们采用文献[14]和[20]的办法，用生成元及关系来定义 Clifford 代数. 和别的定义相比，这样的定义已经不时兴了. 但是我们相信它将有助于人们对 Clifford 代数本身透彻的了解.

定义 5.1.1 Clifford 代数 $C_n(-1)$ 是一个 $\mathbf{R}$ 上的结合代数. 它具有单位元 1，以 $e_1, \cdots, e_n$ 为生成元，并且满足下列关系：

$$\begin{cases} e_i^2 = 1, & \forall i, \\ e_i e_j = -e_j e_i, & \forall i \neq j. \end{cases}$$

例 5.1.2 $C_2(-1)$ 与四元数代数 $\mathbf{H}$ 是同样的. 此同构是由下列对应诱导的.

$$\begin{cases} e_1 \leftrightarrow i, \\ e_2 \leftrightarrow j, \\ e_1 e_2 \leftrightarrow k. \end{cases}$$

作为实向量空间，$C_n(-1)$具有由下列单项式构成的基：

$$\{e_{i_1}\cdots e_{i_k}|1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n,\ 0\leqslant k\leqslant n\},$$

其中当 $k=0$ 时，$e_{i_1}\cdots e_{i_k}=1$. 由此可见

$$\dim_{\mathbf{R}} C_n(-1)=2^n,$$

在$C_n(-1)$中可以引入下列结构：

(1) 一个自然的内积$\langle,\rangle$，使得上述单项式构成幺正基.

(2) 一个标准的代数反同构

$$(\ )^t: C_n(-1)\to C_n(-1),$$

使得

$$(e_{i_1}\cdots e_{i_k})^t=e_{i_k}\cdots e_{i_1}.$$

由此可知：若 a、$b\in C_n(-1)$，则$(a\cdot b)^t=a^t\cdot b^t$.

(3) $C_n(-1)$中一个 $\mathbf{Z}_2$(模 2 整数环)分次结构，即有下列向量空间的直和分解：

$$C_n(-1)=C_n^+(-1)\oplus C_n^-(-1),$$

使得

$$C_n^+(-1)\cdot C_n^+(-1)\subset C_n^+(-1),\ \ C_n^+(-1)\cdot C_n^-(-1)\subset C_n^-(-1),$$
$$C_n^-(-1)\cdot C_n^+(-1)\subset C_n^-(-1),\ \ C_n^-(-1)\cdot C_n^-(-1)\subset C_n^+(-1).$$

这里的$C_n^+(-1)$与$C_n^-(-1)$分别是由集合

$$\{e_{i_1}\cdots e_{i_k}|i\text{ 为偶数}\}$$

与

$$\{e_{i_1}\cdots e_{i_k}|i\text{ 为奇数}\}$$

张成的向量空间.

定义 5.1.3 在 $C_n(-1)$中定义一些子集合如下：

(i) $\mathbf{R}^n$ 是由$\{e_1, \cdots, e_n\}$张成的实向量空间；

(ii) $S^{n-1}=\{a\in\mathbf{R}^n|\langle a, a\rangle=1\}$，其中$\langle,\rangle$是$C_n(-1)$中的自然内积在 $\mathbf{R}^n$ 上的限制；

(iii) $\mathrm{Pin}(n)=\{a\in C_n(-1)|$存在$u_1, \cdots, u_k\in S^{n-1}$，使得

$$a=u_1\cdots u_k\};$$

(iv) $\mathrm{Spin}(n)=\{a\in C_n(-1)|$存在$u_1, \cdots, u_{2k}\in S^{n-1}$，使得

$$a=u_1\cdots u_{2k}\}.$$

下面介绍 Clifford 代数的两个重要侧面. 其一是它的某些内

自同构的性质,其二是它的表示. 设 $u\in C_n(-1)$, u 可逆, 则有

$$u_*: C_n(-1)\to C_n(-1): v\mapsto uvu^{-1}.$$

这是一个代数同构,称为 $C_n(-1)$ 的一个内自同构.

命题 5.1.4 关于内自同构有下列事实成立:

(i) 若 $u\in S^{n-1}$, 则 u_* 可以限制为 $\mathbf{R}^n$ 上的变换, 即有

$$S^{n-1}\times \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n: (u, v)\mapsto u_*(v),$$

并且这个 u_* 在 $\mathbf{R}^n$ 上的限制是 $\mathbf{R}^n$ 中的镜射.

(ii) 若 $u\in \mathrm{Spin}(n)$, 则 u_* 可以限制在 $\mathbf{R}^n$ 上(记为 $u_*|_{\mathbf{R}^n}$), 并且 $u_*|_{\mathbf{R}^n}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个旋转. 我们把这个旋转记为 $\rho(u)$.

(iii) 映射

$$\rho: \mathrm{Spin}(n)\to \mathrm{SO}(n)$$

是群的满同态,并且是一个二层覆盖映射.

证明 (i) 对于 u、$v\in\mathbf{R}^n$, 由定义 5.1.1 容易证明

$$u\cdot v+v\cdot u=-2\langle u, v\rangle.$$

于是对于 $u\in S^{n-1}$, $v\in\mathbf{R}^n$, 有

$$\begin{aligned}u_*(v)&=u\cdot v\cdot u^{-1}=u\cdot v\cdot u-(-v\cdot u-2\langle u, v\rangle)u\\&=v-2\langle u, v\rangle u.\end{aligned}$$

注意到 $v-2\langle u, v\rangle u\in\mathbf{R}^n$, 故 u_* 可以限制到 $\mathbf{R}^n$ 上. 又由下图所示, 映射

$$u_*: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n: v\mapsto u\cdot v\cdot u^t$$

是关于 u 的垂直平面的镜射.

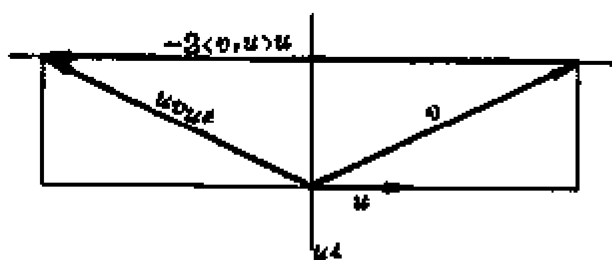


图 5.1

(ii) 因为 $\mathbf{R}^n$ 中偶数个镜射的复合必是一个旋转, 所以当 $u\in\mathrm{Spin}(n)$ 时, $u_*|_{\mathbf{R}^n}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的旋转. 这便得到

$$\rho: \mathrm{Spin}(n)\to\mathrm{SO}(n): a\mapsto\rho(a).$$

其中矩阵 $\rho(a)$ 可如下具体定义:

$$(ae_1a^t, \cdots, ae_na^t)=(e_1, \cdots, e_n)\cdot\rho(a).$$

(iii) 由于 $\mathbf{R}^n$ 中任何一个旋转必可表为偶数个镜射的复合, 所以 ρ 是满映射. 从下列计算

$$\begin{aligned}(e_1, \cdots, e_n)\rho(a\cdot b)&=(abe_1(ab)^t, \cdots, abe_n(ab)^t)\\&=(abe_1b^ta^t, \cdots, abe_nb^ta^t)\\&=a[(be_1b^t, \cdots, be_nb^t)]a^t\\&=a[(e_1, \cdots, e_n)\rho(b)]a^t\\&=[a(e_1, \cdots, e_n)a^t]\cdot\rho(b)\\&=[(e_1, \cdots, e_n)\rho(a)]\cdot\rho(b),\end{aligned}$$

可知 $\rho(a\cdot b)=\rho(a)\cdot\rho(b), \quad \forall a、b\in \mathrm{Spin}(n).$

因此 ρ 是群同态. 若 $a\in \mathrm{Spin}(n)$, $\rho(a)=1$, 则有

$$(ae_1a^t, \cdots, ae_na^t)=(e_1, \cdots, e_n),$$

即有 $$ae_ia^t=e_i, \quad \forall i.$$

注意到 $aa^t=1$, 所以

$$e_i^{-1}\cdot a\cdot e_i=a.$$

假若 $$a=\sum_{s>0}\sum_{j_1<\cdots<j_{2s}}\lambda_{j_1\cdots j_{2s}}e_{j_1}\cdots e_{j_{2s}},$$

于是便有 $\sum\lambda_{j_1\cdots j_{2s}}e_{j_1}\cdots e_{j_{2s}}=\sum\lambda_{j_1\cdots j_{2s}}e_i^{-1}e_{j_1}\cdots e_{j_{2s}}e_i.$

由直接验算知:

$$e_i^{-1}e_{j_1}\cdots e_{j_{2s}}e_i=\begin{cases}-e_{j_1}\cdots e_{j_{2s}}, & \text{如果 } s>0 \text{ 且 } i\in\{j_1, \cdots, j_{2s}\};\\ e_{j_1}\cdots e_{j_{2s}}, & \text{如果 } s>0 \text{ 且 } i\notin\{j_1, \cdots, j_{2s}\};\\ 1, & \text{如果 } s=0.\end{cases}$$

从而可知: a 只可能是实数. 考虑到 $aa^t=1$, 可知 $a=\pm 1$. 于是命题得证. ▌

下面讨论 Clifford 代数的表示问题. 一个**表示**就是一个代数同态:

$$\varphi: C_n(-1)\to \mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_1),$$

或 $$\varphi: C_n(-1)\to \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V_2),$$

其中 V_1、V_2 分别是实、复向量空间; $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(V_1)$ 和 $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V_2)$ 分别

是 V_1、V_2 中所有线性变换构成的代数.

设 $\Lambda_{\mathbf{R}}^k(n)$、$\Lambda_{\mathbf{C}}^k(n)$ 分别是由集合

$$\{\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n\}$$

张成的实、复向量空间(参见引理1.6.5前的定义), 令

$$\Lambda_{\mathbf{R}}^*(n)=\sum_k \Lambda_{\mathbf{R}}^k(n),$$

$$\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)=\sum_k \Lambda_{\mathbf{C}}^k(n),$$

并定义下列线性映射:

$$\varepsilon_i:\ \Lambda_{\mathbf{R}}^*(n)\to\Lambda_{\mathbf{R}}^*(n):\ \theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}\mapsto\theta_i\wedge\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k},$$

$$l_i:\ \Lambda_{\mathbf{R}}^*(n)\to\Lambda_{\mathbf{R}}^*(n):\ \theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}$$

$$\mapsto\sum_{s=1}^{k}(-1)^{s-1}\delta_{i,i_s}\theta_{i_1}\wedge\cdots\hat{\theta}_{i_s}\cdots\wedge\theta_{i_k}.$$

引理 5.1.5　设 ε_i、$l_i\in\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\Lambda_{\mathbf{R}}^*(n))$ 定义如上, 则有

$$(\varepsilon_i+l_i)(\varepsilon_j+l_j)+(\varepsilon_j+l_j)(\varepsilon_i+l_i)=2\delta_{ij},$$

$$(\varepsilon_i+l_i)(\varepsilon_j-l_j)+(\varepsilon_j-l_j)(\varepsilon_i+l_i)=0,$$

$$(\varepsilon_i-l_i)(\varepsilon_j-l_j)+(\varepsilon_j-l_j)(\varepsilon_i-l_i)=-2\delta_{ij}.$$

证明　这是一个直接的验算, 故从略.

定义 5.1.6　令 $C_n(1,\ -1)$ 是一个 $\mathbf{R}$ 上的结合代数, 它具有单位元1; 以 e_1^+, …, e_n^+, e_1^-, …, e_n^- 为生成元, 并且仅满足下列关系:

$$\begin{cases}e_i^+e_j^++e_j^+e_i^+=2\delta_{ij},\\ e_i^+e_j^-+e_j^-e_i^+=0,\\ e_i^-e_j^-+e_j^-e_i^-=-2\delta_{ij}.\end{cases}$$

命题 5.1.7　令 $\mathfrak{N}_1$: $C_n(1,\ -1)\to\mathrm{End}(\Lambda_{\mathbf{R}}^*(n))$ 是满足下列条件的代数同态:

$$\mathfrak{N}_1(e_i^+)=\varepsilon_i+l_i,$$

$$\mathfrak{N}_1(e_i^-)=\varepsilon_i-l_i,$$

则 $\mathfrak{N}_1$ 是同构.

证明　由引理 5.1.5 知 $\mathfrak{N}_1$ 的定义是合理的. 如果 α_1, …, $\alpha_m\in\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\Lambda_{\mathbf{R}}^*(n))$, 我们把以 α_1, …, α_m 生成的子代数记为

$\mathfrak{A}(\alpha_1, \cdots, \alpha_m)$. 于是易证下列等式:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{A}(\mathfrak{R}_1(e_1^+), \cdots, \mathfrak{R}_1(e_n^+), \mathfrak{R}_1(e_1^-), \cdots, \mathfrak{R}_1(e_n^-))\\&=\mathfrak{A}(\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n, l_1, \cdots, l_n)\\&=\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\varLambda_{\mathbf{R}}^*(n)).\end{aligned}$$

所以 $\mathfrak{R}_1$ 是满的. 当把 $C_n(-1, 1)$ 和 $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\varLambda_{\mathbf{R}}^*(n))$ 看成向量空间时, 易知它们的维数皆是 2^{2n}, 从而 $\mathfrak{R}_1$ 是代数同构. 命题证毕. ∎

定理 5.1.8(**Clifford 代数基本定理**)　存在 2^n 维复向量空间 V, 使得 $C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}$ 与 $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ 间有代数同构, 并由这个代数同构给出 $C_{2n}(-1)$ 在 V 上的表示是 $C_{2n}(-1)$ 的唯一的不可约复表示.

证明　由下列条件

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{R}_2(e_{n+k}) &= \sqrt{-1}\mathfrak{R}_1(e_k^+),\\ \mathfrak{R}_2(e_k) &= \mathfrak{R}_1(e_k^-),\end{aligned}\right\}\quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

可以唯一确定复代数同态:

$$\mathfrak{R}_2: C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}\to\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\varLambda_{\mathbf{R}}^*(n)\otimes\mathbf{C}).$$

命题 5.1.7 表明这个 $\mathfrak{R}_2$ 是同构. 于是取 $V=\varLambda_{\mathbf{R}}^*(n)\otimes\mathbf{C}$, 即知定理前半部正确. 我们知道 $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)$ 是单代数, 即它的任何一个理想或者是由单个零元素构成, 或者就是它自己. 对于一个不可约表示

$$\mu: C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}\to\mathrm{End}(V),$$

由于 V 中不可能有非零的 $C_{2n}(-1)$ 不变的真子空间, 所以 μ 是满的, 又由于 $C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}$ 是单代数, 故

$$\mu^{-1}(0)=\text{理想}=0.$$

从而 μ 是同构, 并且可知是唯一的不可约复表示. 证毕. ∎

例 5.1.9　在 $n=1$ 的情形, 我们来考察定理 5.1.8 中的 $\mathfrak{R}_2$. 对于 e_1、$e_2\in C_2(-1)$, 由

$$\mathfrak{R}_2(e_1)=\sqrt{-1}(\varepsilon_1+l_1),$$

$$\mathfrak{R}_2(e_2)=(\varepsilon_1-l_1),$$

故 $\mathfrak{R}_2(e_1)(1,\ \theta_1)=(\sqrt{-1}\theta_1,\ \sqrt{-1})=(1,\ \theta_1)\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix}$,

$$\mathfrak{R}_2(e_2)(1,\ \theta_1)=(\theta_1,\ -1)=(1,\ \theta_1)\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

由此可知 $\mathfrak{R}_2(e_1)$、$\mathfrak{R}_2(e_2)$、$\mathfrak{R}_2(e_1e_2)$分别对应着

$$\begin{pmatrix}0 & i\\ i & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & -i\end{pmatrix}.$$

后者就是所谓的 Pauli 矩阵.

由 $\mathrm{Spin}(2n)\subset C_{2n}(-1)$及 $C_{2n}(-1)$在 $\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)$上的作用, 自然导出 $\mathrm{Spin}(2n)$在 $\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)$上的作用. 令

$$S(2n)=\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n),$$
$$S^+(2n)=\Lambda^{\mathrm{even}}_{\mathbf{C}}(n),$$
$$S^-(2n)=\Lambda^{\mathrm{odd}}_{\mathbf{C}}(n).$$

定理 5.1.10 存在 2^n 维复向量空间 $S(2n)$及分解

$$S(2n)=S^+(2n)+S^-(2n),$$

使得 $S(2n)$是 $C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}$ 模, 并且 $S^+(2n)$与 $S^-(2n)$皆是不可约 $\mathrm{Spin}(2n)$模, $\dim_{\mathbf{C}}S^+(2n)=\dim_{\mathbf{C}}S^-(2n)=2^{n-1}$. 此外若令

$$T=(\sqrt{-1})^n e_1\cdots e_{2n}\in C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C},$$

则

$$S^+(2n)=\{v\in S(2n)\mid Tv=v\},$$
$$S^-(2n)=\{v\in S(2n)\mid Tv=-v\}.$$

注 5.1.11 定理 5.1.10 是定理 5.1.8 的补充. 定理 5.1.8 中唯一的 V 就是这里的 $S(2n)$. 现在断言在 $V=S(2n)$中有分解

$$V=S^+(2n)+S^-(2n),$$

并且 $S^\pm(2n)$有一些性质. $S^\pm(2n)$上有 $\mathrm{Spin}(2n)$作用, 这可看作为 $\mathrm{SO}(2n)$的双值表示, 通常称为旋表示. $S^\pm(2n)$称为旋量空间, 其中的向量称为旋量. 定理 5.1.10 中的验算请大家自己去作.

习题 5.1.12 试证 $C_{2n}(-1)$在 $S(2n)$上的作用满足:

$$C^+_{2n}(-1)\cdot S^+(2n)\subset S^+(2n),\ C^+_{2n}(-1)\cdot S^-(2n)\subset S^-(2n),$$
$$C^-_{2n}(-1)\cdot S^+(2n)\subset S^-(2n),\ C^-_{2n}(-1)\cdot S^-(2n)\subset S^+(2n).$$

在这一节末尾, 我们对 Clifford 代数的讨论作一小结. 我们

证明了下列(i)、(ii)、(iii):

(i) 有一个 Clifford 代数 $C_{2n}(-1)$, 一个群 Spin(2n)和一个向量空间$S(2n)$.

(ii) 有下列三个作用

$$\eta: C_{2n}(-1)\times S(2n)\to S(2n);$$
$$\xi: \mathrm{Spin}(2n)\times S(2n)\to S(2n);$$
$$\zeta: \mathrm{Spin}(2n)\times C_{2n}(-1)\to C_{2n}(-1).$$

其中 η, ξ 的定义分别见定理 5.1.8 和定理 5.1.10, ζ 是内自同构(见命题5.1.4).

(iii) η、ξ、ζ 之间有下列关系: 对于任意的 $g\in\mathrm{Spin}(2n)$, $a\in C_{2n}(-1)$, $v\in S(2n)$, 有

$$\xi(g,\ \eta(a,\ v))=\eta(\zeta(g,\ a),\ \xi(g,\ v)),$$

或简记为
$$g\cdot(a\cdot v)=(g\cdot a)\cdot(g\cdot v).$$

上面的 η 表明 $S(2n)$ 是一个 Clifford 模. (iii) 表明有一个 Spin(2n)作用于这个 Clifford 模上. 因此上面的(i)、(ii)、(iii)合起来说明 $S(2n)$是一个群 Spin(2n)作用其上的 Clifford 模, 我们简称为 Spin(2n)-Clifford 模. 在第 8 章中, 我们把这个概念推广为 G-Clifford 模. 它在构造一阶微分算子时起着重要作用.

§5.2 超 代 数

近些年来, 几何学中出现了超向量空间、超代数等观念. 这和一些人用物理学中超对称的想法来理解 Atiyah-Singer 指标理论有着密切的关系. 超对称的观念输入到数学, 能为人感知到的一部分, 恐怕就是在某种空间(例如某向量空间, 或某个代数)中引进 $\mathbf{Z}_2$ 分次结构, 人们称之为"超结构". 其实这种 $\mathbf{Z}_2$ 分次结构早就明明白白地存在于数学之中. 前面介绍过的 $C_{2n}(-1)$、$\Lambda_n^*(n)$、$S(2n)$ 和 $\mathrm{End}_{\mathbf{R}}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n))$ 中就有这种 $\mathbf{Z}_2$ 分次结构 (下面将具体说明). 人们在定义 de Rham-Hodge, Signature 算子时, 实际上就用到了 $\mathbf{Z}_2$ 分次结构. 可是过去的数学家们并没有把这个 $\mathbf{Z}_2$ 分

次结构观念大肆宣扬，可能是因为缺乏好的关于 $\mathbf{Z}_2$ 分次结构的定理的缘故. 我们很想在介绍这种 $\mathbf{Z}_2$ 分次结构（超结构）的时候，能从数学上说出这种观念有意思之处（下面的命题 5.2.9 和命题 5.2.12），但愿我们能说明白. 至于这种超结构的观念能否在数学的领域内站住脚，这不是我们关心的问题.

定理 5.2.1 设 V 是一个向量空间，它的一个超结构（或称 $\mathbf{Z}_2$ *分次结构*）就是向量空间的一个直和分解：

$$V=V_0+V_1,$$

其中 V_0、V_1 中的元素分别称为*偶元素*和*奇元素*. 带有一个确定超结构的向量空间称作*超向量空间*.

若 V 是一个超向量空间，我们定义一个线性变换 $\varepsilon: V\to V$，使得

$$\varepsilon|_{V_0}=\mathrm{id}: V_0\to V_0,$$
$$\varepsilon|_{V_1}=-\mathrm{id}: V_1\to V_1.$$

易见 $\varepsilon^2=\mathrm{id}=1$. 反之，若有适合条件 $\varepsilon^2=1$ 的线性变换 $\varepsilon: V\to V$，则可定义 V 的超结构使得

$$V_0=\{x\in V\mid \varepsilon x=x\},$$
$$V_1=\{x\in V\mid \varepsilon x=-x\}.$$

由此可见 V 的一个超结构其实就是一个满足 $\varepsilon^2=1$ 的线性变换 $\varepsilon: V\to V$.

我们知道经典的张量空间是由切向量空间经两种运算 $\otimes$ 与 $\mathrm{Hom}(\ ,\ )$ 构造出来的，所以要考察经这两种运算后，可不可以引进诱导超结构.

定义 5.2.2 设 V 和 U 是两个超向量空间，则在它们的张量积空间 $V\otimes U$ 中有一个自然的诱导超结构，使得

$$(V\otimes U)_0=V_0\otimes U_0+V_1\otimes U_1,$$
$$(V\otimes U)_1=V_0\otimes U_1+V_1\otimes U_0.$$

我们把带有这种超结构的 $V\otimes U$ 称为 V 与 U 的*超张量积*，并仍记为 $V\otimes U$.

定义 5.2.3 设 V 和 U 是两个超向量空间，则在向量空间

$$\mathrm{Hom}(V, U)\equiv\{\varphi: V\to U \mid \varphi \text{ 是线性变换}\}$$

中有一个自然的诱导超结构，使得

$$(\mathrm{Hom}(V, U))_0=\{\varphi: V\to U \mid \varphi(V_0)\subset U_0,\ \varphi(V_1)\subset U_1\},$$

$$(\mathrm{Hom}(V, U))_1=\{\varphi: V\to U \mid \varphi(V_0)\subset U_1,\ \varphi(V_1)\subset U_0\}.$$

以上关于向量(或张量)空间的超结构观念可以说是"平淡无奇"的．不过，下面讲到关于代数的超结构时，情况就不同了．

定义 5.2.4 设 $\mathfrak{A}$ 是一个代数．它的一个超结构是：当把 $\mathfrak{A}$ 看成向量空间时有一个直和分解：

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_0+\mathfrak{A}_1,$$

并且这个分解与代数中的乘法有下列关系：

$$\mathfrak{A}_i\cdot\mathfrak{A}_j\subset\mathfrak{A}_{i+j},$$

其中 i、$j\in\mathbf{Z}_2$．带有超结构的代数叫作*超代数*．

有了定义 **5.2.4** 之后，我们马上可以提出下列两个问题：

问题 1 众所周知，当 V 是向量空间时，

$$\mathrm{End}(V)\equiv\mathrm{Hom}(V, V)$$

是一个代数．当 V 具有超结构时，$\mathrm{End}(V)$中的自然的诱导超结构(定义 5.2.3)是不是使 $\mathrm{End}(V)$成为一个超代数？

问题 2 当 $\mathfrak{A}_1$、$\mathfrak{A}_2$ 是两个超代数时，在定义 5.2.2 的超结构下 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ 是一个超向量空间．问在 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ 中是否可以引进乘法，使之成为超代数？

问题 1 的答案是肯定的．验证此事很容易，故省略之．问题 2 的答案稍稍有点奇怪．在 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ 中可以引进两种乘法，都能使 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ 成为超代数．这两个乘法分别记为"·"与"∧"，定义如下：对于 a_1、$b_1\in\mathfrak{A}_1$，a_2、$b_2\in\mathfrak{A}_2$，

$$(a_1\otimes a_2)\cdot(b_1\otimes b_2)=(a_1b_1)\otimes(a_2b_2),$$

$$(a_1\otimes a_2)\wedge(b_1\otimes b_2)=(-1)^{|a_2|\cdot|b_1|}(a_1b_1)\otimes(a_2b_2),$$

其中第二式只对 a_2、b_1 是奇元素或偶元素的情形来定义的．当 a 是奇元素时，$|a|=1$；而当 a 是偶元素时，$|a|=0$．容易验证：带有乘法"·"或"∧"的 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ 是超代数．值得注意的是：乘法"∧"依赖于 $\mathfrak{A}_1$、$\mathfrak{A}_2$ 的超结构，而乘法"·"则不然．

定义 5.2.5　设 $\mathfrak{A}_1$、$\mathfrak{A}_2$ 是两个超代数，在超向量空间 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ 中引入上述乘法"·"，得到的超代数记为 $\mathfrak{A}_1\dot{\otimes}\mathfrak{A}_2$ 或 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$.

定义 5.2.6　设 $\mathfrak{A}_1$、$\mathfrak{A}_2$ 是两个超代数，在超向量空间 $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ 中引入上述乘法"∧"，得到的超代数记为 $\mathfrak{A}_1\widehat{\otimes}\mathfrak{A}_2$.

习题 5.2.7　试证在外代数 $\Lambda^*_{\mathbb{R}}(n)$ 和 Clifford 代数 $C_n(-1)$ 中引进下述超结构：

$$(\Lambda^*_{\mathbb{R}}(n))_0=\Lambda^{\mathrm{even}}_{\mathbb{R}}(n),\quad(\Lambda^*_{\mathbb{R}}(n))_1=\Lambda^{\mathrm{odd}}_{\mathbb{R}}(n);$$
$$(C_n(-1))_0=C^+_n(-1),\quad(C_n(-1))_1=C^-_n(-1)$$

后，它们都成为超代数.

习题 5.2.8　试证

(i) $\Lambda^*_{\mathbb{R}}(m)\widehat{\otimes}\Lambda^*_{\mathbb{R}}(n)=\Lambda^*_{\mathbb{R}}(m+n)$,

$C_m(-1)\widehat{\otimes}C_n(-1)=C_{m+n}(-1)$.

(ii) 存在两个超代数 $\mathfrak{A}$ 与 $\mathfrak{B}$，使得作为代数而言，$\mathfrak{A}\dot{\otimes}\mathfrak{B}$ 与 $\mathfrak{A}\widehat{\otimes}\mathfrak{B}$ 是不同构的（作为超代数而言，当然就更不同构了）.（提示：取 $\mathfrak{A}=\mathfrak{B}=C_1(-1)$）.

设 V、U 是二超向量空间. 根据问题 1 的答案知：$\mathrm{End}(V)$、$\mathrm{End}(U)$、$\mathrm{End}(V\otimes U)$ 皆是超代数.

命题 5.2.9　设 V、U 是两个超向量空间，则有下列两个超代数同构：

$$\mathfrak{R}:\ \mathrm{End}(V)\dot{\otimes}\mathrm{End}(U)\to\mathrm{End}(V\otimes U),$$
$$\widehat{\mathfrak{R}}:\ \mathrm{End}(V)\hat{\otimes}\mathrm{End}(U)\to\mathrm{End}(V\otimes U),$$

其中 $\mathfrak{R}$、$\widehat{\mathfrak{R}}$ 的定义如下：对于任意的 $\varphi\in\mathrm{End}(V)$、$\psi\in\mathrm{End}(U)$，$v\in V$、$u\in U$，有

$$(\mathfrak{R}(\varphi\otimes\psi))(v\otimes u)=\varphi(v)\otimes\psi(u),$$
$$(\widehat{\mathfrak{R}}(\varphi\otimes\psi))(v\otimes u)=(-1)^{|\psi|\cdot|v|}\varphi(v)\otimes\psi(u).$$

证明　首先验证 $\mathfrak{R}$ 与 $\widehat{\mathfrak{R}}$ 皆是超代数的同态，而后验证是满的，再计算维数便可得到命题的证明. ▮

注 5.2.10　命题 5.2.9 看起来很平凡，证明也不难，可是它导出的一些事实却不是很明显的. 例如我们从命题 5.2.9 立即得到下列超代数同构：

$$\mathfrak{R}^{-1}\cdot\hat{\mathfrak{R}}: \mathrm{End}(V)\hat{\otimes}\mathrm{End}(U)\to\mathrm{End}(V)\dot{\otimes}\mathrm{End}(U).$$

和前面的习题5.2.8(ii)对照起来，可见这个同构是不平凡的同构．此外，命题5.2.9还有别的推论．当把$\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)$看成超向量空间时，有下列超向量空间同构：

$$\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)=\underbrace{\Lambda_{\mathbf{C}}^*(1)\otimes\cdots\otimes\Lambda_{\mathbf{C}}^*(1)}_{n\text{个}}.$$

于是命题5.2.9给出下列超代数同构：

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n))&=\mathrm{End}_{\mathbf{C}}((\Lambda_{\mathbf{C}}^*(1))^{\otimes n})\\&=(\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(1)))^{\hat{\otimes}n}.\end{aligned}$$

只要验证$\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(1))$与$C_2(-1)\otimes\mathbf{C}$是超代数同构之后，就有

$$\begin{aligned}\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n))&=(\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(1)))^{\hat{\otimes}n}\\&=(C_2(-1)\otimes\mathbf{C})^{\hat{\otimes}n}\\&=C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}.\end{aligned}$$

这就是定理5.1.8.

定义 5.2.11 设V是一个超向量空间，s是它的超结构．若$\varphi\in\mathrm{End}(V)$，令$\mathrm{tr}\,\varphi$为线性变换$\varphi$的迹，并令

$$\widehat{\mathrm{tr}}\,\varphi=\mathrm{tr}(s\circ\varphi).$$

这里的tr与$\widehat{\mathrm{tr}}$分别称为φ的迹与超迹.

命题 5.2.12 设V、U是两个超向量空间，$\varphi\in\mathrm{End}(V)$，$\psi\in\mathrm{End}(U)$，则

$$\mathrm{tr}\,\mathfrak{R}(\varphi\otimes\psi)=(\mathrm{tr}\varphi)\cdot(\mathrm{tr}\psi),$$

$$\widehat{\mathrm{tr}}\,\hat{\mathfrak{R}}(\varphi\otimes\psi)=(\widehat{\mathrm{tr}}\,\varphi)\cdot(\widehat{\mathrm{tr}}\,\psi).$$

证明 第一个等式是众所周知的，故不证了．现证第二式：由下列向量空间的直和分解：

$$V=V_0\dotplus V_1,$$
$$U=U_0+U_1,$$
$$V\otimes U=V_0\otimes U_0+V_0\otimes U_1+V_1\otimes U_0+V_1\otimes U_1,$$

我们有下列向量因子空间的投射：

$$\pi_i^V: V\to V_i\subset V,$$
$$\pi_i^U: U\to U_i\subset U,$$
$$\pi_{ij}: V\otimes U\to V_i\otimes U_j\subset V\otimes U,$$

其中 i、$j\in\mathbf{Z}_2$. 若令

$$\varphi_{ij}=\pi_i^V\varphi\pi_j^V: V\to V,$$
$$\psi_{ij}=\pi_i^U\psi\pi_j^U: U\to U,$$

则有

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{tr}}\,\widehat{\mathfrak{N}}(\varphi\otimes\psi)&=\mathrm{tr}\{\widehat{\mathfrak{N}}(\varphi\otimes\psi)\circ(\pi_{00}+\pi_{11}-\pi_{01}-\pi_{10})\}\\&=\mathrm{tr}\{\mathfrak{N}(\varphi\otimes(\psi_{00}+\psi_{01}+\psi_{10}+\psi_{11}))\circ(\pi_{00}-\pi_{01})\\&\quad+\mathfrak{N}(\varphi\otimes(\psi_{00}-\psi_{01}-\psi_{10}+\psi_{11}))\circ(\pi_{11}-\pi_{10})\}\\&=\mathrm{tr}\{\mathfrak{N}(\varphi_{00}\otimes\psi_{00}-\varphi_{00}\otimes\psi_{11}+\varphi_{11}\otimes\psi_{11}-\varphi_{11}\otimes\psi_{00})\}\\&=(\mathrm{tr}\,\varphi_{00})(\mathrm{tr}\,\psi_{00})-(\mathrm{tr}\,\varphi_{00})(\mathrm{tr}\,\psi_{11})+(\mathrm{tr}\,\varphi_{11})(\mathrm{tr}\,\psi_{11})\\&\quad-(\mathrm{tr}\,\varphi_{11})(\mathrm{tr}\,\psi_{00})\\&=(\widehat{\mathrm{tr}}\,\varphi)(\widehat{\mathrm{tr}}\,\psi).\end{aligned}$$

上面计算中第一个等号将 $\widehat{\mathrm{tr}}$ 转化为 tr. 由于在 $\mathrm{End}(V_0\otimes U_0)$ 与 $\mathrm{End}(V_1\otimes U_1)$ 上 $\widehat{\mathrm{tr}}=\mathrm{tr}$, 而在 $\mathrm{End}(V_0\otimes U_1)$ 与 $\mathrm{End}(V_1\otimes U_0)$ 上 $\widehat{\mathrm{tr}}=-\mathrm{tr}$, 故第一个等号成立. 第二个等号是将 $\widehat{\mathfrak{N}}$ 转化为 $\mathfrak{N}$. 由于在 $V_0\otimes U_0$ 与 $V_0\otimes U_1$ 上 $\widehat{\mathfrak{N}}(\varphi\widehat{\otimes}\psi)$ 和 $\mathfrak{N}(\varphi\otimes\psi)$ 取值相等, 而在 $V_1\otimes U_0$ 与 $V_1\otimes U_1$ 上它们取值相等或反号取决于 ψ 属于 $(\mathrm{End}\,U)_0$ 或是 $(\mathrm{End}\,U)_1$. 注意到 ψ_{00} 和 $\psi_{11}\in(\mathrm{End}U)_0$, ψ_{01} 和 $\psi_{10}\in(\mathrm{End}U)_1$, 故第二个等号成立. 如果

$$\mathrm{tr}\{\mathfrak{N}(\varphi_{\alpha_1\alpha_2}\otimes\psi_{\beta_1\beta_2})\circ\pi_{ij}\}\neq0,$$

则必有

$$\alpha_1=\alpha_2=i\in\mathbf{Z}_2,$$
$$\beta_1=\beta_2=j\in\mathbf{Z}_2.$$

这件事使得上述第三个等号成立. 最后两个等号是显然的. 于是命题得证. ∎

§5.3 超迹的计算

由命题 5.1.8 和命题 5.1.10, 有下列超代数同构:

$$C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}=\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(V)=\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S(2n)).$$

于是定义 5.2.11 中的超迹(函数):

$$\widehat{\mathrm{tr}}: \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(S(2n))\to\mathbf{C}$$

化为

$$\widehat{\mathrm{tr}}: C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}\to\mathbf{C}.$$

命题 5.3.1 对于 $1\leqslant i_1<\cdots<i_q\leqslant 2n$,

$$\widehat{\mathrm{tr}}(e_{i_1}\cdots e_{i_q})=\begin{cases}0, & \text{当 } q<2n;\\ \dfrac{2^n}{(\sqrt{-1})^n}, & \text{当 } q=2n.\end{cases}$$

证明 若记超向量空间 $S(2n)$ 中的超结构为

$$\varepsilon: S(2n)\to S(2n),$$

则易见: 对任意的 $e_i\in C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C}$, 有

$$\varepsilon e_i=-e_i\varepsilon: S(2n)\to S(2n).$$

当 $q=2p+1$ 时,

$$\varepsilon e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}}=-e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}}\varepsilon.$$

于是

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{tr}}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}})&=\mathrm{tr}(\varepsilon e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}})\\&=-\mathrm{tr}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}}\varepsilon)\\&=-\mathrm{tr}(\varepsilon(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}}\varepsilon)\varepsilon^{-1})\\&=-\mathrm{tr}(\varepsilon e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}})\\&=-\widehat{\mathrm{tr}}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}}),\end{aligned}$$

从而

$$\widehat{\mathrm{tr}}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p+1}})=0.$$

下面对 $q=2p$ 的情形进行讨论. 若记

$$\mathrm{tr}_{\pm}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})=\mathrm{tr}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}}|S^{\pm}(2n)),$$

则

$$\widehat{\mathrm{tr}}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})=\mathrm{tr}_{+}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})-\mathrm{tr}_{-}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}}).$$

由于

$$e_j: S^{+}(2n)\to S^{-}(2n)$$

是向量空间的同构, 故

$$\mathrm{tr}_{+}(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})=\mathrm{tr}_{-}(e_je_{i_1}\cdots e_{i_{2p}}e_j^{-1}).$$

因为 $e_j e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}} e_j^{-1}=\begin{cases} e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}}, & 当\ j\notin\{i_1,\cdots,i_{2p}\};\\ -e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}}, & 当\ j\in\{i_1,\cdots,i_{2p}\},\end{cases}$

故 $\mathrm{tr}_+(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})=\begin{cases}\mathrm{tr}_-(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}}), & 若有\ j\notin\{i_1,\cdots,i_{2p}\};\\ -\mathrm{tr}_-(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}}), & 若有\ j\in\{i_1,\cdots,i_{2p}\}.\end{cases}$

从而即知：当 $2p<2n$ 时，

$$\mathrm{tr}_+(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})=\mathrm{tr}_-(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})=-\mathrm{tr}_-(e_{i_1}\cdots e_{i_{2p}})=0.$$

这时命题5.3.1的证明只剩下验证：

$$\widehat{\mathrm{tr}}\,(e_1\cdots e_{2n})=\frac{2^n}{(\sqrt{-1})^n}.$$

这个等式来自定理5.1.10：

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{tr}}(e_1\cdots e_{2n})&=\frac{1}{(\sqrt{-1})^n}\widehat{\mathrm{tr}}(T)\\&=\frac{1}{(\sqrt{-1})^n}(\mathrm{tr}_+(T)-\mathrm{tr}_-(T))\\&=\frac{2^n}{(\sqrt{-1})^n}.\end{aligned}$$

命题5.3.1证毕. ▌

在本章§5.1中，我们曾讨论过实向量空间 $\Lambda^*_{\mathbf{R}}(2n)$，以及其上的线性变换 ε_i 和 l_i. 在命题5.1.7的同构 $\mathfrak{R}_1$ 下，我们采取下列等同：

$$e_i^{\pm}=\varepsilon_i\pm l_i;\ \Lambda^*_{\mathbf{R}}(2n)\to\Lambda^*_{\mathbf{R}}(2n).$$

命题 5.3.2 设 $\Lambda^*_{\mathbf{R}}(2n)$ 中的超结构由下式确定：

$$(\Lambda^*_{\mathbf{R}}(2n))_0=\Lambda^{\mathrm{even}}_{\mathbf{R}}(2n),$$
$$(\Lambda^*_{\mathbf{R}}(2n))_1=\Lambda^{\mathrm{odd}}_{\mathbf{R}}(2n).$$

若 $1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant 2n$; $1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant 2n$, 则

$$\widehat{\mathrm{tr}}(e_{i_1}^+\cdots e_{i_p}^+e_{j_1}^-\cdots e_{j_q}^-)=\begin{cases}0, & 如果\ p\neq 2n\ 或\ q\neq 2n;\\ (-4)^n, & 如果\ p=q=2n.\end{cases}$$

注 5.3.3 与命题5.3.2等价的一个事实在1971年为 Patodi 证出（见文献[16]）. 和前面的命题5.3.1的证明一样，Patodi 在证明中未用超代数的概念. 但是这种不用超代数的证明方法可能不利于下面的命题5.3.4的处理. 因此在这里我们就不

介绍 Patodi 的原始证明了. 希望读者看过命题5.3.4的证明之后, 用超代数法自己证出命题5.3.2.

命题5.3.4　设 $\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)$ 的超结构是

$$\tau_n: \Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)\to\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n),$$

其中 τ_n 由下式定义:

$$\tau_n=(\sqrt{-1})^{k(k-1)+n}*: \Lambda_{\mathbb{C}}^k(2n)\to\Lambda_{\mathbb{C}}^{2n-k}(2n).$$

换句话说

$$(\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n))_0=\{\alpha\in\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)\mid\tau_n\alpha=\alpha\},$$

$$(\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n))_1=\{\alpha\in\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)\mid\tau_n\alpha=-\alpha\}.$$

若 $1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant 2n$; $1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant 2n$, 则

$$\widehat{\mathrm{tr}}(e_{i_1}^+\cdots e_{i_p}^+e_{j_1}^-\cdots e_{j_q}^-)=\begin{cases}(-4\sqrt{-1})^n, & \text{如果 } p=0 \text{ 且 } q=2n;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases}$$

证明　分三步来证:

(1) 在 τ_m、τ_n、τ_{m+n} 选定为 $\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2m)$、$\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)$、$\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2m+2n)$ 的超结构之后,我们断言: 存在下列超向量空间的同构(按定义5.2.2的意义):

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2m)\otimes\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)=\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2m+2n).$$

换句话说, 如果 $\alpha\in\Lambda_{\mathbb{C}}^{k_1}(2m)$, $\beta\in\Lambda_{\mathbb{C}}^{k_2}(2n)$, 且满足条件:

$$\tau_m\alpha=(-1)^{l_1}\alpha,$$

$$\tau_n\beta=(-1)^{l_2}\beta,$$

那么我们断言

$$\tau_{m+n}(\alpha\otimes\beta)=(-1)^{l_1+l_2}\alpha\otimes\beta.$$

在 $\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2m)$ 中的 Hodge $*$ 算子记为 $*_m$, 于是便有

$$\begin{aligned}\tau_{m+n}(\alpha\otimes\beta)&=\tau_{m+n}(\alpha\wedge\beta)\\&=(\sqrt{-1})^{(k_1+k_2)(k_1+k_2-1)+m+n}*_{m+n}(\alpha\wedge\beta)\\&=(\sqrt{-1})^{(k_1+k_2)(k_1+k_2-1)+m+n}\cdot\left(\frac{\alpha\wedge\beta\wedge(*_m\alpha)\wedge(*_n\beta)}{*1}\right)\\&\quad\times(*_m\alpha)\wedge(*_n\beta)\\&=(\sqrt{-1})^{(k_1+k_2)(k_1+k_2-1)+m+n}\cdot(-1)^{k_1k_2}\cdot(*_m\alpha)\wedge(*_n\beta)\\&=(\tau_m\alpha)\wedge(\tau_n\beta)\\&=(-1)^{l_1+l_2}\alpha\wedge\beta\end{aligned}$$

$$=(-1)^{l_1+l_2}\alpha\otimes\beta.$$

从而断言成立. 这样一来, 便有下列超向量空间的同构:

$$\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)=\underbrace{\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2)\otimes\cdots\otimes\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2)}_{n\text{个}}.$$

(2) $\operatorname{End}(\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2))$中的元素皆可表为$e_1^{\pm}$、$e_2^{\pm}$的一个多项式. 故若$\beta_i\in\operatorname{End}(\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2))$, 则有多项式$\psi_i$(不可交换变量的多项式)使得

$$\beta_i=\psi_i(e_1^+,\ e_1^-,\ e_2^+,\ e_2^-).$$

令 $$[\beta_i]=\psi_i(e_{2i-1}^+,\ e_{2i-1}^-,\ e_{2i}^+,\ e_{2i}^-)\in\operatorname{End}(\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)).$$

于是易证 $$\hat{\mathfrak{R}}(\beta_1\otimes\cdots\otimes\beta_n)=[\beta_1]\cdots[\beta_n]\in\operatorname{End}(\Lambda_{\mathbb{C}}^*(2n)).$$

从而可知 $$\widehat{\operatorname{tr}}([\beta_1]\cdots[\beta_n])=(\widehat{\operatorname{tr}}\,\beta_1)\cdots(\widehat{\operatorname{tr}}\,\beta_n).$$

(3) 在$n=1$的情形下, 通过直接计算验证命题5.3.4. 而后由上面第(2)步的结论知命题5.3.4对于一般的n也成立.

注 5.3.5 在命题5.3.4的证明中, 我们几乎用了§5.2中的所有概念与结论. 由此可见, §5.2中讨论的是没有物理影响也成的超代数.

第 6 章

Signature 算子的局部指标定理

Signature 算子与流形的符号差密切相关，因而是极有几何意义的算子. 并且证明 Signature 算子的局部指标定理的方法又具有代表性，所以本书将着重介绍这个算子的局部指标定理. 首先我们用陈根算法试论定理的证明. 从严格意义上讲，这不是证明. 但是由于它能直接给出形式证明，又有利于我们对待证明定理难点的分析，所以在 §6.1 中作详细介绍. 对于初学者来说，可以由此直接步入问题的核心，还可以学习陈根的思考方法，形式地论证许多复杂的问题. 在 §6.2 中将完成 Signature 算子的局部指标定理的严格证明.

§6.1　试论 Signature 算子的局部指标定理

设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形，令

$$D \equiv D_+ = (d+\delta): \Lambda_+(M) \to \Lambda_-(M)$$

是定义 1.6.11 中的 Signature 算子，loc. ind(D)是它的局部指标(见定义 4.4.9). loc. ind(D)是定义在 M 上的一个函数. 由于它来自定理 4.3.1 的渐近展开式，故有时称为*渐近密度*. 局部指标定理的最核心部分是断言：这个渐近密度就是*示性密度*. 这个断言包含在 Mckean-Singer 问题的结论中. Mckean-Singer 问题的难点在于证明：极限

$$\lim_{t\to 0}(\operatorname{tr} G_+(t,x,x) - \operatorname{tr} G_-(t,x,x))$$

存在，并且是示性密度. 式中的 $G_\pm(t,x,y)$是热算子 $\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta_\pm$ 的

基本解，即满足下列方程：

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta_\pm\right)G_\pm(t,\ y,\ \xi)=0;\\ \lim\limits_{t\to0}\displaystyle\int_M G_\pm(t,\ y,\ \xi)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(y),\end{cases}$$

其中 $\Delta_\pm$ 定义为

$$\Delta_\pm\equiv(d+\delta)^2: \Lambda_\pm(M)\to\Lambda_\pm(M).$$

在幺正标架 $\{E_1,\ \cdots,\ E_{2l}\}$ 下，$\Delta_\pm$ 表为

$$\Delta_\pm-(d+\delta)^2=-\Delta_0+\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}E_i^-E_j^-E_k^+E_l^+-\frac{1}{4}\sum_{i,j}R_{ijij}.$$

这是 Weitzenböck 公式(见定理 1.6.13). 公式中的 Δ_0 是 Laplace-Beltrami 算子(见定义 1.5.2). 在第 1 章 § 1.8 中写出了 $S^2(r)$ 上的 Δ_0，可能已给读者留下了深刻的印象. 一般来说，Δ_0 在参照系下的具体表达式是异常复杂的. 下面将在以 ξ 为心的法坐标系下写出 Δ_0 的近似表达式. 在第 1 章 § 1.8 中有

$$\begin{aligned}\Delta_0=&\left(H^{ji}\frac{\partial}{\partial y_j}+H^{si}H_{skl}\omega_k\wedge i(E_l)\right)\\ &\times\left(H^{mi}\frac{\partial}{\partial y_m}+H^{qi}H_{q\alpha\beta}\omega_\alpha\wedge i(E_\beta)\right)\\ &-\left(H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}\frac{\partial}{\partial y_j}+H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}H_{jkl}\omega_k\wedge i(E_l)\right),\end{aligned}$$

其中重复的指标表示对此指标求和. 将习题 1.7.10 中的公式

$$H_{ij}=\delta_{ij}+\frac{1}{6}\sum_{k,l}R_{ikli}(0)y_ky_l+\cdots,$$

$$H_{ijk}=\frac{1}{2}\sum_l R_{iljk}(0)y_l+\cdots,$$

和 $$H^{ij}=\delta_{ij}+\cdots$$

代入上式，得

$$\begin{aligned}\Delta_0=&\left(\frac{\partial}{\partial y_i}+\frac{1}{2}R_{jikl}(0)y_j\omega_k\wedge i(E_l)\right)\\ &\times\left(\frac{\partial}{\partial y_i}+\frac{1}{2}R_{si\alpha\beta}(0)y_s\omega_\alpha\wedge i(E_\beta)\right)\end{aligned}$$

$$-\left(\frac{1}{2}R_{isjs}(0)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}+\frac{1}{4}R_{\alpha sji}(0)R_{\beta jkl}(0)y_\alpha y_\beta\omega_k\wedge i(E_l)\right)$$

$$+\cdots$$

$$=\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}+R_{ijkl}(0)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}\omega_k\wedge i(E_l)$$

$$+\frac{1}{4}R_{iskl}(0)R_{js\alpha\beta}(0)y_iy_j\omega_k\wedge i(E_l)\omega_\alpha\wedge i(E_\beta)+\cdots.$$

仿照定理 1.6.13 中的一个计算，有

$$\Delta_0=\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}+\frac{1}{4}R_{ij\alpha\beta}(0)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}(E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)$$

$$-\frac{1}{64}R_{iskl}(0)R_{sj\alpha\beta}(0)y_iy_j(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)$$

$$\times(E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)+\cdots.$$

于是有 $\Delta_\pm$ 的近似表达式：

$$\Delta_\pm=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{1}{4}\sum_{i,j,\beta,\alpha}R_{ij\alpha\beta}(0)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}(E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)$$

$$+\frac{1}{64}\sum_{\substack{i,j,s\\k,l,\alpha,\beta}}R_{iskl}(0)R_{sj\alpha\beta}(0)y_iy_j(E_k^+E_l^+-E_k^-E_l^-)$$

$$\times(E_\alpha^+E_\beta^+-E_\alpha^-E_\beta^-)+\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}(0)E_i^-E_j^-E_k^+E_l^++\cdots.$$

在上述表达式中含于"…"中的项称为*余项*．看了上面的计算，读者可能要问：是不是有一个原则区分出余项呢？我们的回答是下列二点：

(1) 在一个区分余项的原则确定之后，把余项看作零，进行陈根计算，算出的 Q_1 如果是(或猜想是)Q_0 时，我们就称这个原则是*合适的*．

(2) 对于合适的原则来讲，分出的余项越多，则它就越好．我们当然尽量选取好的合适的原则．在上面写出的 $\Delta_\pm$ 的近似表达式事实上都是合适的．对于 Signature 算子来讲，$\Delta_\pm$ 的下列近似表达式

$$\Delta_{\pm}=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{64}\sum R_{iskl}(0)R_{sj\alpha\beta}(0)y_iy_jE_k^-E_l^-E_\alpha^-E_\beta^-$$
$$+\frac{1}{8}\sum R_{ijkl}(0)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^-+\cdots$$

也是合适的.

现在我们用陈根算法来计算, 令

$$Q_0=\lim_{t\to 0}(\mathrm{tr}G_+(t,\ \xi,\ \xi)-\mathrm{tr}\ G_-(t,\ \xi,\ \xi)).$$

$G_\pm(t,\ y,\ 0)$满足的方程是

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_\pm\right)G_\pm(t,\ y,\ 0)=0,$$

其中点ξ的法坐标是$(0,\ \cdots,\ 0)\equiv 0$. 由于引理 3.3.2 中等式$(*)$

得
$$(\Omega_{ij})=\sum_{s=1}^{l}2\pi u_s(\theta_{2s-1,2s}-\theta_{2s,2s-1})$$
$$=2\pi\begin{pmatrix}0 & u_1 & & & \\ -u_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & u_l \\ & & & -u_l & 0\end{pmatrix},$$

(其中$u_1,\ \cdots u_l$是陈根.)

故
$$\Omega_{ij}=\sum_{s=1}^{l}2\pi u_s(\theta_{2s-1,2s}-\theta_{2s,2s-1})_{ij}$$
$$=\sum_{s=1}^{l}2\pi u_s(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1}).$$

若令
$$A_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(0)E_\alpha^-E_\beta^-$$

以及记　$x_s=\sum_{\alpha,\beta}\pi u_s(E_\alpha,\ E_\beta)E_\alpha^-E_\beta^-,\qquad a_s=E_{2s-1}^+E_{2s}^+,$

则有下列形式计算:

$$A_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\Omega_{ij}(E_\alpha,\ E_\beta)E_\alpha^-E_\beta^-$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\sum_s 2\pi u_s(E_\alpha,\ E_\beta)E_\alpha^-E_\beta^-(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1})$$
$$=\sum_s x_s(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1}),$$

$$\frac{1}{64}\sum R_{iski}(0)R_{sj\alpha\beta}(0)\,y_iy_jE_k^-E_l^-E_\alpha^-E_\beta^-$$

$$=\frac{1}{16}\sum A_{i\beta}A_{\beta j}y_iy_j=\frac{-1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2),$$

$$\frac{1}{8}\sum R_{ijkl}(0)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^-=\frac{1}{4}\sum A_{ij}E_i^+E_j^+$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{i,j}\sum_{s=1}^{l}x_s(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1})E_i^+E_j^+$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}x_sE_{2s-1}^+E_{2s}^+=\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}a_sx_s.$$

于是在陈根算法中 $G_\pm(t,\ y,\ 0)$满足的方程是:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}-\sum_{i=1}^{2l}\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}a_sx_s\right]G_\pm=0.$$

渐近展开定理(定理 4.3.1)表明

$$\lim_{t\to0}(\sqrt{4\pi t})^{2l}G_\pm(t,\ 0,\ 0)=1.$$

引理 6.1.1　下列方程(其中 y 是 $\boldsymbol{R}$ 中的量)

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}-\dfrac{x^2}{16}y^2\right)H(t,\ y)=0\\ \lim\limits_{t\to0}\sqrt{4\pi t}H(t,\ 0)=1.\end{cases}$$

有唯一解:

$$H(t,\ y)=\left(\frac{\sqrt{-1}\,x}{8\pi\cdot\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{-1}xt}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(x\cdot\coth\frac{\sqrt{-1}xt}{2}\right)\cdot y^2\right].$$

证明　求解的方程相当于热方程的基本解的方程，故至多有唯一解. 假若方程的解可表为

$$H(t,\ y)=\frac{1}{s(t)}e^{y^2c(t)},$$

于是

$$\frac{\partial H}{\partial t}=H\cdot\left\{-\frac{s'(t)}{s(t)}+y^2c'(t)\right\},$$

$$\frac{\partial^2H}{\partial y^2}=H\cdot\{2c(t)+4y^2c^2(t)\}.$$

求解的方程变为

$$\begin{cases} -\dfrac{s'(t)}{s(t)}=2c(t), \\ c'(t)=4c^2(t)+\dfrac{x^2}{16}, \\ \lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{4\pi t}}{s(t)}=1. \end{cases}$$

由上述第二方程得:

$$dt=\frac{dc(t)}{4c^2(t)+\dfrac{x^2}{16}}=\frac{dc}{\left(2c-\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x\right)\left(2c+\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x\right)}$$

$$=\frac{dc}{\dfrac{\sqrt{-1}}{2}x}\cdot\left(\frac{1}{2c-\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x}-\frac{1}{2c+\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{-1}x}d\log\frac{2c-\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x}{2c+\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x}.$$

从而存在常数 λ, 使得

$$\frac{2c-\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x}{2c+\dfrac{\sqrt{-1}}{4}x}=\lambda e^{\sqrt{-1}xt},$$

或者 $$c(t)=\frac{\sqrt{-1}}{8}x\cdot\frac{1+\lambda e^{\sqrt{-1}xt}}{1-\lambda e^{\sqrt{-1}xt}}.$$

又由第一方程得:

$$-d\log s(t)=-\frac{s'(t)}{s(t)}dt=2c(t)dt$$

$$=\frac{\sqrt{-1}}{4}x\left(1+\frac{2\lambda e^{\sqrt{-1}xt}}{1-\lambda e^{\sqrt{-1}xt}}\right)dt$$

$$=d\left(\frac{\sqrt{-1}}{4}xt-\frac{1}{2}\log(1-\lambda e^{\sqrt{-1}xt})\right),$$

故又存在常数 μ, 使得

$$s(t)=\mu\cdot\sqrt{1-\lambda e^{\sqrt{-1}xt}}\cdot e^{-\frac{\sqrt{-1}}{4}xt}.$$

由于

$$s(t)=\mu\left(e^{-\frac{\sqrt{-1}}{2}xt}-\lambda e^{\frac{\sqrt{-1}}{2}xt}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\mu\left((1-\lambda)-\frac{1+\lambda}{2}\sqrt{-1}xt+o(t)\right)^{\frac{1}{2}},$$

故由
$$\lim_{t\to 0}\frac{\sqrt{4\pi t}}{s(t)}=1$$

推知
$$\begin{cases}\lambda=1,\\ \mu^2=\dfrac{4\pi\sqrt{-1}}{x}.\end{cases}$$

由此即知

$$c(t)=-\frac{\sqrt{-1}}{8}x\cdot\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{-1}xt}{2}}{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{-1}xt}{2}}=-\frac{\sqrt{-1}}{8}x\coth\frac{\sqrt{-1}xt}{2},$$

$$s(t)=\left(\frac{8\pi}{\sqrt{-1}x}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{-1}xt}{2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

从而

$$H(t,y)=\left(\frac{\sqrt{-1}x}{8\pi\cdot\operatorname{sh}\frac{\sqrt{-1}xt}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\exp\left[-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(x\cdot\coth\frac{\sqrt{-1}xt}{2}\right)\cdot y^2\right]$$

是解。引理证毕。

引理 6.1.2 下列方程

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-\displaystyle\sum_{i=1}^{2l}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)+\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}a_sx_s\right)H=0\\ \lim\limits_{t\to 0}(4\pi t)^lH(t,0,\cdots,0)=1\end{cases}$$

的唯一解是:

$$H(t,\ y_1,\ \cdots,\ y_{2l})$$
$$=\prod_{s=1}^{l}\left[\frac{\sqrt{-1}x_s}{8\pi\cdot\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(x_s\cdot\coth\frac{\sqrt{-1}x_st}{2}\right)(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)-\frac{a_sx_st}{2}\right)\right].$$

证明 若把引理6.1.1中的解 $H(t,\ y)$ 记为 $h(t,\ y;x)$，则易见

$$H(t,\ y_1,\ \cdots,\ y_{2l})$$
$$=\prod_{s=1}^{l}\left[h(t,\ y_{2s-1};x_s)\cdot h(t,\ y_{2s};x_s)\cdot\exp\left(-\frac{a_sx_st}{2}\right)\right]$$

是本引理的解. 将上式右端详细写下来即得本引理的证明.

由于

$$Q_0=\lim_{t\to0}(\operatorname{tr}G_+(t,\ \xi,\ \xi)-\operatorname{tr}G_-(t,\ \xi,\ \xi))$$
$$=\lim_{t\to0}(\operatorname{tr}G_+(t,\ 0,\ 0)-\operatorname{tr}G_-(t,\ 0,\ 0)),$$

故对 Q_0 进行的陈根计算如下:

$$\widetilde{Q}_0=\lim_{t\to0}(\operatorname{tr}_+H(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)-\operatorname{tr}_-H(t,\ 0,\ \cdots,\ 0))$$
$$=\lim_{t\to0}\widehat{\operatorname{tr}}\,H(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)$$
$$=\lim_{t\to0}\widehat{\operatorname{tr}}\left\{\prod_{s=1}^{l}\left[\frac{\sqrt{-1}x_s}{8\pi\cdot\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{a_sx_st}{2}\right)\right]\right\}.$$

上式中的 $x_s=\sum\limits_{\alpha,\beta}\pi u_s(E_\alpha,\ E_\beta)E_\alpha^-E_\beta^-:\Lambda_\pm(M)|_\xi\to\Lambda_\pm(M)|_\xi$，这里的 $\Lambda_\pm(M)|_\xi$ 就是引理1.6.5意义下的向量丛 $O(M)\times_{O(2l)}\Lambda_\pm(2l)$ 在 ξ 点的纤维，$\operatorname{tr}_+H(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 是线性变换

$$H(t,\ 0,\ \cdots,\ 0):\Lambda_+(M)|_\xi\to\Lambda_+(M)|_\xi$$

的迹，$\operatorname{tr}_-H(t,\ 0,\ \cdots,\ 0)$ 作类似的理解. 注意到

$$\widehat{\operatorname{tr}}\,(E_{i_1}^+\cdots E_{i_p}^+E_{j_1}^-\cdots E_{j_q}^-)=\widehat{\operatorname{tr}}(e_{i_1}^+\cdots e_{i_p}^+e_{j_1}^-\cdots e_{j_q}^-),$$

其中右端项是第5章§5.3定义的. 另外再据命题5.3.4可知:

(i) 当 $p+q<l$ 时,

$$\widehat{\mathrm{tr}}[x_{i_1}\cdots x_{i_p}(a_{j_1}x_{j_1})\cdots(a_{j_q}x_{j_q})]=0;$$

(ii) 当 $p+q=l$ 且集合 $\{j_1,\ \cdots,\ j_q\}$ 中的元素不成对出现时,

$$\widehat{\mathrm{tr}}[x_{i_1}\cdots x_{i_p}(a_{j_1}x_{j_1})\cdots(a_{j_q}x_{j_q})]=0;$$

(iii) 当 $p+q=l$ 且集合 $\{j_1,\ \cdots,\ j_q\}$ 中的元素成对出现时,

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathrm{tr}}[x_{i_1}\cdots x_{i_p}(a_{j_1}x_{j_1})\cdots(a_{j_q}x_{j_q})]\\&=\widehat{\mathrm{tr}}[x_{i_1}\cdots x_{i_p}(\sqrt{-1}x_{j_1})\cdots(\sqrt{-1}x_{j_q})].\end{aligned}$$

(上面的(i)、(ii)是易知的,(iii)的成立须用到

$$a_s a_s=E^+_{2s-1}E^+_{2s}E^+_{2s-1}E^+_{2s}=-1.\ )$$

如果 $f(x_1,\ \cdots,\ x_l)$ 是关于变元 $x_1,\ \cdots,\ x_l$ 的幂级数,我们记此幂级数的 m 阶项为

$$(f(x_1,\ \cdots,\ x_l))(\hat{m}),$$

于是利用这个记号及上面的(i)、(ii)、(iii)有

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_0&=\lim_{t\to0}\widehat{\mathrm{tr}}\left\{\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\sqrt{-1}x_s}{8\pi\cdot\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}\cdot e^{-\frac{a_sx_st}{2}}\right)\right\}\\
&=\lim_{t\to0}\frac{1}{(4\pi t)^l}\widehat{\mathrm{tr}}\left\{\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}\cdot e^{-\frac{a_sx_st}{2}}\right)\right\}\\
&=\lim_{t\to0}\frac{1}{(4\pi t)^l}\widehat{\mathrm{tr}}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}\cdot e^{-\frac{a_sx_st}{2}}\right)\right](\hat{l})\right\}\\
&=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{-1}x_s}{2}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{-1}x_s}{2}}\cdot e^{-\frac{a_sx_s}{2}}\right)\right](\hat{l})\right\}\\
&=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\dfrac{\sqrt{-1}x_s}{2}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{\sqrt{-1}x_s}{2}}\cdot\frac{e^{-\frac{a_sx_s}{2}}+e^{\frac{a_sx_s}{2}}}{2}\right)\right](\hat{l})\right\}\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}\cdot\frac{e^{-\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}+e^{\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}}{2}\right)\right](\hat{l})\right\}$$

$$=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}{\tanh\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}\right](\hat{l})\right\}.$$

令
$$\tilde{x}_s=\sum_{\alpha,\beta}\pi u_s(E_\alpha,\ E_\beta)\omega_\alpha\wedge\omega_\beta.$$

又由命题 5.3.4 有下列形式计算:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{tr}}\,(x_{i_1}\cdots x_{i_l})&=(2\pi)^l\sum_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\\ \beta_1,\cdots,\beta_l}}u_{i_1}(E_{\alpha_1},\ E_{\beta_1})\cdots\\&\quad\times u_{i_l}(E_{\alpha_l},\ E_{\beta_l})\,\widehat{\mathrm{tr}}(E_{\bar{\alpha}_1}E_{\bar{\beta}_1}\cdots E_{\bar{\alpha}_l}E_{\bar{\beta}_l})\\&=(2\pi)^l\sum_{\substack{\alpha_1,\cdots,\alpha_l\\ \beta_1,\cdots,\beta_l}}u_{i_1}(E_{\alpha_1},\ E_{\beta_1})\cdots u_{i_l}(E_{\alpha_l},\ E_{\beta_l})\\&\quad\times(-4\sqrt{-1})^l\cdot\omega_{\alpha_1}\wedge\omega_{\beta_1}\wedge\cdots\\&\quad\wedge\omega_{\alpha_l}\wedge\omega_{\beta_l}(E_1,\ \cdots,\ E_{2l})\\&=(-4\sqrt{-1})^l(\tilde{x}_{i_1}\cdots\tilde{x}_{i_l})(E_1,\ \cdots,\ E_{2l}).\end{aligned}$$

从形式计算观点看:

$$\tilde{x}_s=\sum_{\alpha,\beta}\pi u_s(E_\alpha,\ E_\beta)\omega_\alpha\wedge\omega_\beta=2\pi u_s,$$

于是

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_0&=\frac{1}{(4\pi)^l}(-4\sqrt{-1})^l\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}\tilde{x}_s}{2}}{\tanh\frac{\sqrt{-1}\tilde{x}_s}{2}}\right)(E_1,\ \cdots,\ E_{2l})\\&=\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}\tilde{x}_s}{2}\cdot\frac{-\sqrt{-1}}{\pi}}{\tanh\left(\frac{\sqrt{-1}\tilde{x}_s}{2}\cdot\frac{-\sqrt{-1}}{\pi}\right)}\right)(E_1,\ \cdots,\ E_{2l})\\&=\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tanh u_s}\right)(E_1,\ \cdots,\ E_{2l}).\end{aligned}$$

将上式中的 $\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tanh u_s}$ 写成 $\sigma_1,\ \cdots,\ \sigma_l$ 的幂级数(这是可能的),

再按定义 3.3.1 将 σ_i 换为 $\zeta(\sigma_i)-p_i(D)$，便得到 $A^*(M)$ 中的元素. 如果把这个元素仍记为 $\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tan\mathrm{h}u_s}$，于是

$$Q_1=\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tan\mathrm{h}u_s}\right)(E_1,\ \cdots,\ E_{2l}).$$

此时

$$Q_0=Q_1$$

或

$$\lim_{t\to0}(\mathrm{tr}\,G_+(t,\ x,\ x)-\mathrm{tr}G_-(t,\ x,x))$$
$$=\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tan\mathrm{h}u_s}\right)(E_1,\ \cdots,\ E_{2l})$$

就是 Signature 算于的局部指标定理的结论. 这样说来，我们是用陈根算法证明了 Signature 算子的局部指标定理了. 但一定有人会认为这不是证明，那么就让我们在下一节(§6.2)中看一个严格的证明吧!

§6.2 严格的证明

回忆上一节用陈根算法的讨论，那里有两处未说清楚，那就是：

(1) 把 Laplace-Beltrami 算子 $\varDelta_\pm$ 写成省略余项的表达式

$$\varDelta_\pm=\tilde{\varDelta}_\pm+\cdots,$$

其中

$$\tilde{\varDelta}_\pm=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{64}\sum R_{iskl}(0)R_{sj\alpha\beta}(0)y_iy_jE_k^-E_l^-E_\alpha^-E_\beta^-$$
$$+\frac{1}{8}\sum R_{ijkl}(0)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^-.$$

为什么省略的部分"…"在计算

$$Q_0(\xi)=\lim_{t\to0}(\mathrm{tr}G_+(t,\ \xi,\ \xi)-\mathrm{tr}G_-(t,\ \xi,\ \xi))$$

时不产生影响?其中 ξ 是法坐标系的原点，由于 $\tilde{\varDelta}_\pm$ 依赖于 ξ，所以 $\tilde{\varDelta}_\pm$ 不是流形 M 上的算子. 但是可以利用 $\tilde{\varDelta}_\pm$ 计算在 ξ 点处的 MP 拟基本解 $\tilde{H}_\pm(t,\ y,\ \xi)$，而后从形式级数 $\tilde{H}_\pm$ 中取出合适的

项, 或者令

$$\widetilde{Q}_0(\xi)=\lim_{t\to 0}(\mathrm{tr}\,\widetilde{H}_+(t,\xi,\xi)-\mathrm{tr}\,\widetilde{H}_-(t,\xi,\xi)).$$

于是我们要问: 下列等式

$$Q_0'(\xi)=\widetilde{Q}_0(\xi)$$

是否成立? 其中 $\widetilde{H}_\pm(t,y,\xi)$ 的确切定义是

$$\widetilde{H}_\pm(t,y,\xi)=\frac{e^{-\frac{|y|^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^{2l}}\sum_{i=0}^{\infty}t^i\widetilde{U}^{(i)}(\xi,y),$$

并满足在形式级数意义下的下列方程:

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\widetilde{\Delta}_\pm\right)\widetilde{H}_\pm(t,y,\xi)=0,\\ \lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{4\pi t})^{2l}\widetilde{H}_\pm(t,0,\xi)=1: \Lambda_\pm(M)|_\xi\to\Lambda_\pm(M)|_\xi.\end{cases}$$

(2) 用陈根方法计算 $\widetilde{Q}_0(\xi)$, 得到的结果为什么一定是 $\widetilde{Q}_0(\xi)$ 呢? 详细地说, 由陈根代换

$$(\Omega_{ij})\to 2\pi\begin{pmatrix}0 & u_1 & & & \\ -u_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & u_l\\ & & & -u_l & 0\end{pmatrix}\tag{6.2.1}$$

形式地导出下列代换:

$$(A_{ij})\to\begin{pmatrix}0 & x_1 & & & \\ -x_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & x_l\\ & & & -x_l & 0\end{pmatrix},\tag{6.2.2}$$

其中
$$A_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}\Omega_{ij}(E_\alpha,E_\beta)E_\alpha^-E_\beta^-.$$

以代换(6.2.2)代入 $\widetilde{H}_\pm(t,y,\xi)$ 满足的方程, 得

$$\begin{cases}\left[\dfrac{\partial}{\partial t}-\sum\limits_{i=1}^{l}\dfrac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\dfrac{1}{16}\sum\limits_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)+\dfrac{1}{2}\sum\limits_{s=1}^{l}a_sx_s\right]H(t,y)=0,\\ \lim\limits_{t\to 0}(\sqrt{4\pi t})^{2l}H(t,0)=0.\end{cases}$$

对带有隐含参数 $x_1, \cdots, x_l, a_1, \cdots, a_l$ 的 $H(t, 0)$ 作下列代换:

$$\begin{cases} x_s = \sum_{\alpha,\beta} \pi u_s(E_\alpha, E_\beta) E_\alpha^- E_\beta^-, \\ a_s = E_{2s-1}^+ E_{2s}^+, \end{cases}$$

再取空间 $(A_+(M)+A_-(M))|_\xi$ 的超迹, 简记为 $\widehat{\mathrm{tr}} H(t, 0)$. 此时 $\lim\limits_{t\to 0} \widehat{\mathrm{tr}} H(t, 0)$ 是 $u_1^2, \cdots, u_l^2$ 的一个对称多项式 P 形式地在 $(E_1, \cdots, E_{2l})$ 上取值, 即

$$\lim_{t\to 0} \widehat{\mathrm{tr}} H(t, 0) = P(u_1^2, \cdots, u_l^2)(E_1, \cdots, E_{2l}).$$

再用定义 3.3.1, 将 $P(u_1^2, \cdots, u_l^2)$ 换为示性式 ω, 为什么有下列等式

$$\omega(E_1, \cdots, E_{2l}) = \tilde{Q}_0(\xi)$$

呢?为了避免上面出现 $u_s(E_\alpha, E_\beta)$ 这样含糊的概念, 可以换一说法. 由于 $H(t, 0)$ 是 $x_1^2, \cdots, x_l^2$ 的对称函数, 用一个类似于定义 3.3.1 的代换, 将

$$x_1^{2s} + \cdots + x_l^{2s} = \frac{(-1)^s}{2} \mathrm{tr} \begin{pmatrix} 0 & x_1 & & & \\ -x_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & x_l \\ & & & -x_l & 0 \end{pmatrix}^s$$

换为 $$\frac{(-1)^s}{2} \mathrm{tr}(A_{ij})^s = \frac{(-1)^s}{2} \sum A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \cdots A_{i_s i_1},$$

于是 $H(t, 0)$ 变为通常意义下的变换了, 再进行运算 $\lim\limits_{t\to 0} \widehat{\mathrm{tr}}$ 之后, 便会是上面的 $\omega(E_1, \cdots, E_{2l})$. 有一点"小毛病"值得在此一提, 由于 $x_1, \cdots, x_l$ 的多项式中变元乘法是可交换的, 而 A_{ij} 之间的乘法不可交换(注意 Ω_{ij} 之间的外乘法是可交换的), 所以将 $x_1^2, \cdots, x_l^2$ 的对称多项式换为包含 A_{ij} 的式子时会出现一点"小毛病", 但我们暂时把它忽略. 由于使用代换 (6.2.1) 与定义 3.3.1 是有条件的, 引理 3.3.2 表明须存在一个多项式 f, 使得

$$\tilde{Q}_0(\xi) = f(p_1(\nabla), \cdots, p_{[\frac{l}{2}]}(\nabla), pf(\nabla))(E_1, \cdots, E_{2l}).$$

因此使用代换(6.2.2)及一个类似的定义 3.3.1 也有同样的条件.

这样一来，至少有两个具体的问题必须先处理.

问题1 是否有等式

$$Q_0(\xi)=\tilde{Q}_0(\xi)$$

成立?

问题2 是否存在多项式 F，使得

$$\tilde{Q}_0(\xi)=F(p_1(\nabla),\ \cdots,\ p_{[\frac{l}{2}]}(\nabla),\ pf(\nabla))(E_1,\ \cdots,\ E_{2l})?$$

略一思考便知：陈根算法对上述两个问题的解决提供不了任何帮助. 这两个问题需要直接处理. 还剩下一个问题:

问题3 问题2中的 F 与

$$H(t,\ y)=\prod_{s=1}^{l}\left[\frac{\sqrt{-1}x_s}{8\pi\cdot\operatorname{sh}\dfrac{\sqrt{-1}x_st}{2}}\right.$$

$$\left.\times\exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(x_s\cdot\coth\frac{\sqrt{-1}x_st}{2}\right)(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)-\frac{a_sx_st}{2}\right)\right]$$

有什么关系?

下面我们来依次处理问题1、2、3. 关键是要仔细考察 $Q_0(\xi)$ 和 $\tilde{Q}_0(\xi)$. 我们不妨把求 $Q_0(\xi)$ 的方法重复一遍. 设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形，令

$$D\equiv D_{\mp}=(d+\delta):\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)$$

是 Signature 算子;

$$\Delta_{\pm}=(d+\delta)^2:\Lambda_{\pm}(M)\to\Lambda_{\pm}(M)$$

是 Laplace 算子;

$$\Delta_0:\Lambda_{\pm}(M)\to\Lambda_{\mp}(M)$$

是定义1.5.2中的 Laplace-Beltrami 算子. 又令

$$H(t,\ y,\ \xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^{2l}}\sum_{i=0}^{\infty}t^iU_{\pm}^{(i)}(\xi,\ y):\ \Lambda_{\pm}(M)|_{\xi}\to\Lambda_{\pm}(M)|_y$$

为热算子 $\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta_{\pm}$ 的 MP 拟基本解，其中 $y,\ \xi\in M$，$\rho=\rho(y,\ \xi)$ 是 y 与 ξ 间的距离，对于任意 $v\in\Lambda_{\pm}(M)|_{\xi}$，$U_{\pm}^{(i)}(\xi,\ y)v\equiv\mathscr{U}^{(i)}(y)$ 满足引理4.1.1中的方程

$$\begin{cases}\left(\nabla_{\hat{a}}+i+\dfrac{\hat{a}G}{4G}\right)\mathscr{U}^{(i)}(y)=-\Delta_{\pm}\mathscr{U}^{(i-1)}(y);\\ \mathscr{U}^{(-1)}(y)\equiv 0;\\ \mathscr{U}^{(0)}(\xi)=v.\end{cases}\tag{6.2.3}$$

其中 $\hat{a}=\rho\dfrac{\partial}{\partial\rho}$，$\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ 是从 ξ 出发到 y 的测地线的单位切向量，G 的定义见引理 1.7.11. 可以说上述的一切记号与坐标系的选取无关，只假定 y 与 ξ 充分靠近就行了. 于是 Signature 算子 D 在 ξ 点的局部指标为

$$\begin{aligned}Q_0(\xi)&=(\mathrm{loc}\cdot\mathrm{ind}(D))(\xi)\\&=\frac{1}{(\sqrt{4\pi})^{2l}}(\mathrm{tr}\,U_+^{(l)}(\xi,\xi)-\mathrm{tr}U_-^{(l)}(\xi,\xi)).\end{aligned}$$

在以 ξ 为心的法坐标系$(y_1,\ \cdots,\ y_{2l})$下，上述的一切量及方程可具体写出来. 这时 $\xi=(0,\ \cdots,\ 0)=0$，$y=(y_1,\ \cdots,\ y_{2l})$，$\hat{a}=\sum\limits_i y_i\dfrac{\partial}{\partial y_i}$，$\Delta_{\pm}$ 与 Δ_0 将有复杂的表达式，不再细写了. 如果从方程(6.2.3)解出 $U_{\pm}^{(l)}(\xi,y)$，再求出 $Q_0(\xi)$，这是吃力不讨好的. 因为我们只需要求出 $U_{\pm}^{(l)}(\xi,\xi)$就行了. 在 $U_{\pm}^{(l)}(\xi,y)$关于变量$(y_1,\ \cdots,\ y_{2l})$的泰勒级数中，$U_{\pm}^{(l)}(\xi,\ \xi)$只不过是级数的零次项. 方程(6.2.3)的求解，同求泰勒级数解是大不一样的，求泰勒级数解比较容易. 当然一谈到泰勒级数，人们总是要问：这个级数是不是收敛的？是不是收敛到 $U_{\pm}^{(l)}(\xi,y)$？这一问题可以不管，因为用带余项的充分高次泰勒展开式取代泰勒级数，下面的论证就不会有任何问题了. 为简单计，我们还是利用泰勒级数的概念进行下面的推理.

首先我们简化一些记号. 我们把 $U_+^{(i)}$ 和 $U_-^{(i)}$ 合起来记为

$$U^{(i)}(\xi,\ y)=\begin{pmatrix}U_+^{(i)}(\xi,y) & 0\\ 0 & U_-^{(i)}(\xi,y)\end{pmatrix};$$

$$(\Delta_+(M)+\Delta_-(M))_\xi\to(\Delta_+(M)+\Delta_-(M))_y,$$

于是 $\qquad\mathrm{tr}U_+^{(l)}(\xi,\ \xi)-\mathrm{tr}U_-^{(l)}(\xi,\xi)=\widehat{\mathrm{tr}}U^{(l)}(\xi,\xi).$

对于 $\Delta_{\pm}$ 等也作类似的处理. 关于泰勒展开的概念，请参阅第 1 章

§1.7. 对于定义在 ξ 点附近的函数，关于法坐标系的泰勒展开式按照通常理解。对于定义在 ξ 点附近的微分式，相对于局部幺正标架场 $\{E_1, \cdots, E_{2l}\}$ 先将它写为

$$\sum f_{i_1\cdots i_s}(y)\omega_{i_1}\wedge\cdots\wedge\omega_{i_s},$$

然后对函数 $f_{i_1,\cdots,i_s}(y)$ 作泰勒展开，其中 $\{E_1, \cdots, E_{2l}\}$ 是紧接推论 1.7.3 之后定义的局部标架场，$\{\omega_1, \cdots, \omega_{2l}\}$ 是它的对偶标架场。于是对于 $U^{(i)}(\xi, y)$，在取定 $v\in(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi$ 之后，$\mathscr{U}^{(i)}(y)=U^{(i)}(\xi, y)v$ 便是 $\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M)$ 中的元素，故可按上法作泰勒展开。我们把微分式 ω 的泰勒级数中第 k 次项(即含 $y_1, \cdots, y_{2l}$ 的 k 次方单项式之和)记为 $\omega(\hat{k})$。它仍然是一个微分式(当然是局部的)。易见

$$(E_i^\pm\omega)(\hat{k})=E_i^\pm(\omega(\hat{k})),$$

$$\left(\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_i}\omega\right)(\hat{k})=\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_i}(\omega(\widehat{k+1}),$$

其中 $\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_i}=\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^\sigma$，$\sigma=\{E_1, \cdots, E_{2l}\}$，在第 1 章 §1.6 末尾有确切定义。为简单计，我们以后把 $\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_i}$ 记作 $\frac{\partial}{\partial y_i}$。此时的 $\frac{\partial}{\partial y_i}$ 就不是 M 上的局部向量场了，它是作用在微分式上的算子，并且与 σ 的选取有关。为了熟悉这个概念，请读者不妨验证

$$\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_i}E_j^\pm\omega=E_j^\pm\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_i}\omega.$$

$U^{(i)}(\xi, y)$: $(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi\to(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_y$ 也可以看成一个 $(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi$ 中的线性变换族(带参数 y)

$$U^{(i)}(y):(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi\to(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi$$

使得对于任意的 $v\in(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi$，

$$U^{(i)}(\xi, y)v=/\!/_\xi^y U^{(i)}(y)v,$$

其中 $\quad /\!/_\xi^y: (\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi\to(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_y$

是沿着连接 ξ 至 y 的测地线的平移变换。显然在 $(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi$ 中取定基之后，$U^{(i)}(y)$ 是一个带参数 y 的矩阵族。从而 $U^{(i)}(y)$ 可以照通常意义对法坐标 $(y_1, \cdots, y_{2l})$ 作泰勒展开式。

习题 6.2.1 设 $\{E_1, \cdots, E_{2l}\}$ 是 ξ 点附近的幺正标架场，使得沿着过 ξ 的测地线是平行的，则对于任意的 $v\in(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi$，有

$$(\mathscr{U}^{(l)}(y))(\hat{m})=(U^{(l)}(\xi, y)v)(\hat{m})=/\!/_\xi^y[(U^{(l)}(y))(\hat{m})]v.$$

对于微分算子 $\nabla_{\hat{x}}$、Δ，关于变量 $y_1, \cdots, y_{2l}$ 的泰勒展开式定义如下：用第 1 章 §1.6 和 §1.7 的记号有

$$\nabla_{\hat{x}}=\sum_i y_i\nabla_{E_i}-\sum_i y_i\Big(E_i^\sigma+\frac{1}{4}\sum_{j,k}\omega_{jk}(E_i)(E_j^+E_k^+-E_j^-E_k^-)\Big)$$

$$=\sum_i y_iE_i^\sigma+\sum_{i,j,k}\frac{1}{4}y_iH_{ijk}(E_j^+E_k^+-E_j^-E_k^-)$$

$$=\sum_i y_iE_i^\sigma=\sum_i y_i\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)^\sigma=\sum_i y_i\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_i}-\sum_i y_i\frac{\partial}{\partial y_i}.$$

第 1 章 §1.8 中有关于 Δ_0 的公式

$$\Delta_0=\Big(H^{ji}\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_j}+H^{si}H_{skl}\omega_k\wedge i(E_l)\Big)$$

$$\times\Big(H^{mi}\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_m}+H^{qi}H_{q\alpha\beta}\omega_\alpha\wedge i(E_\beta)\Big)$$

$$-\Big(H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}\frac{\mathring{\partial}}{\partial y_j}+H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}H_{jkl}\omega_k\wedge i(E_l)\Big),$$

利用 Weitzenböck 公式(定理 1.6.13)可知 Δ 能表为

$$\Delta=\sum f^\alpha_{i_1\cdots i_p;j_1\cdots j_q}\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_{2l}^{\alpha_{2l}}}\Big)^\sigma E_{i_1}^+\cdots E_{i_p}^+E_{j_1}^-\cdots E_{j_q}^-,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1, \cdots, \alpha_{2l})$，$|\alpha|=\sum\alpha_s$，$\alpha_s$ 是非负整数；记号

$$\Big(\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j}\Big)^\sigma=\Big(\frac{\partial}{\partial y_i}\Big)^\sigma\Big(\frac{\partial}{\partial y_j}\Big)^\sigma,\ f^\alpha_{i_1\cdots i_p;j_1\cdots j_q}$$

是 C^∞ 函数，这里 $\sigma=(E_1, \cdots, E_{2l})$。令 Δ 的泰勒展式的 $\overline{m}$ 次项为

$$\Delta(\hat{m})=\sum f^\alpha_{i_1\cdots i_p;j_1\cdots j_q}(\hat{m})\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_{2l}^{\alpha_{2l}}}\Big)^\sigma E_{i_1}^+\cdots E_{i_p}^+E_{j_1}^-\cdots E_{j_q}^-,$$

若令

$$\Delta^\sigma=\sum f^\alpha_{i_1\cdots i_p;j_1\cdots j_q}\Big(\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_{2l}^{\alpha_{2l}}}\Big)^\sigma(E_{i_1}^+\cdots E_{i_p}^+E_{j_1}^-\cdots E_{j_q}^-)_\xi,$$

易见 $\mathscr{U}^{(l)}(y)$ 满足的方程(6.2.3)变为

$$\begin{cases}\left(\sum_j y_j\dfrac{\partial}{\partial y_j}+i+\dfrac{\partial G}{4G}\right)U^{(i)}(y)=-\Delta^\sigma U^{(i-1)}(y);\\ U^{(-1)}(y)=0,\ \forall y;\\ U^{(0)}(0)=1:(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi\to(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi.\end{cases}\tag{6.2.4}$$

上述$(E^+_{i_1}\cdots E^-_{j_q})_\xi$是$E^+_{i_1}\cdots E^-_{j_q}$在$\xi$点的限制. 比较上述方程两端,可以看出所有$U^{(i)}(y)(\hat{m})$皆可表为下列形式的单项式之和:

$$\alpha=\varphi_{\alpha_1}(y)\frac{\partial}{\partial y_{\beta_1}}\varphi_{\alpha_2}(y)\cdots\frac{\partial}{\partial y_{\beta_m}}\varphi_{\alpha_{m+1}}(y)E^+_{i_1}\cdots E^+_{i_p}E^-_{j_1}\cdots E^-_{j_q},$$

其中φ_{α_s}是定义在ξ的邻域中的C^∞函数, 诸$E^+_{i_s}$皆是限制在ξ点的映射, 即

$$E^+_{i_s}\in\mathrm{Hom}((\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi,\ (\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi).$$

这个α是一个表达式. 若经过计算得到函数$\varphi(y)$使得

$$\varphi(y)=\varphi_{\alpha_1}(y)\frac{\partial}{\partial y_{\beta_1}}\varphi_{\alpha_2}(y)\cdots\frac{\partial}{\partial y_{\beta_m}}\varphi_{\alpha_{m+1}}(y),$$

则令 $\alpha(y)=\varphi(y)E^+_{i_1}\cdots E^+_{i_p}E^-_{j_1}\cdots E^-_{j_q}$.

特别地, 有 $\alpha(0)=\varphi(0)E^+_{i_1}\cdots E^+_{i_p}E^-_{j_1}\cdots E^-_{j_q}$.

若$U^{(i)}(y)(\hat{0})\equiv U^{(i)}(0)$中包含一个表达式$\alpha$, 这个$\alpha$在计算$\widehat{\mathrm{tr}}\,U^{(i)}(0)$时的作用就是$\widehat{\mathrm{tr}}\,\alpha(0)$. 所以我们来寻求使

$$\widehat{\mathrm{tr}}\,\alpha(0)=0$$

的充分条件, 以便在计算$\widehat{\mathrm{tr}}\,U^{(i)}(0)$之前就把$\alpha$删去. 显然有下列两条充分条件:

(i) $\nu(\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m+1}})>m$, 其中$\nu(\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m+1}})$表示函数$\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m+1}}$的零点重数.

(ii) $q<2l$.

第二条件所以是充分的, 是由于命题 5.3.4 的缘故, 即当$q<2l$时

$$\widehat{\mathrm{tr}}\,(E^+_{i_1}\cdots E^+_{i_p}E^-_{j_1}\cdots E^-_{j_q})=0.$$

设λ是任意正整数, 易见

$$(m-\nu(\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m+1}}))+\lambda q<2l\cdot\lambda$$

可导出上述条件(i)或(ii). 因此可以适当选取λ, 使得我们在计算$\widehat{\mathrm{tr}}\,U^{(i)}(0)$前, 尽量多地删去可以删去的项$\alpha$.

定义 6.2.2 设有表达式

$$\alpha=\varphi_{\alpha_1}(y)\frac{\partial}{\partial y_{\beta_1}}\varphi_{\alpha_2}(y)\cdots\frac{\partial}{\partial y_{\beta_m}}\varphi_{\alpha_{m+1}}(y)E^+_{i_1}\cdots E^+_{i_p}E^-_{j_1}\cdots E^-_{j_q},$$

令
$$\chi(\alpha)=m-\nu(\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m+1}})+q.$$

注 上述 $\chi(\alpha)$ 只对表达式 α 定义的。如果把 α 视作定义在 ξ 附近，取值在 $\mathrm{Hom}((\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi,\ (\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi)$ 中的函数时，上述定义 6.2.2 就不合理了。例如

$$\alpha=E_1\cdot E_1,\quad \beta=-1.$$

在第二种情况下，$\alpha=\beta$。而按定义 6.2.2，有

$$\chi(\alpha)=2,\quad \chi(\beta)=0.$$

定义 6.2.3 设 M_ξ 是 M 上 ξ 点的一个邻域，

$$\omega: M_\xi\to\mathrm{Hom}((\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi,\ (\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi)$$

是一个 C^∞ 映射。如果存在有限个表达式 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$，使得

$$\omega=\alpha_1+\cdots+\alpha_k:$$
$$M_\xi\to\mathrm{Hom}((\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi,\ (\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi),$$

并且 $\chi(\alpha_s)<N$，其中 $s=1,\cdots,k$，则记此事实为

$$\chi(\omega)<N.$$

若有两个上述类型的映射 ω_1 与 ω_2，并且

$$\chi(\omega_1-\omega_2)<N,$$

则又可记为
$$\omega_1=\omega_2+(\chi<N).$$

引理 6.2.4 设有映射

$$\omega: M_\xi\to\mathrm{Hom}((\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi,\ (\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi)$$

满足
$$\chi(\omega)<2l,$$

则
$$\widehat{\mathrm{tr}}\,\omega(0)=0.$$

证明时需用命题 5.3.4，前面已经说过，故不细证了。

注 定义 6.2.3 可以稍作推广使得能定义

$$\chi(\omega)\leqslant N$$

和
$$\omega_1=\omega_2+(\chi\leqslant N).$$

命题 6.2.5 下列等式成立：

$$\Delta=(d+\delta)^2=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}E_\alpha^- E_\beta^-$$
$$+\frac{1}{64}\sum_{\substack{i,j,s\\k,l,\alpha,\beta}}R_{iskl}(\xi)R_{sj\alpha\beta}(\xi)y_iy_jE_k^-E_l^-E_\alpha^-E_\beta^-$$
$$+\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}(\xi)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^-+(\chi<2).$$

证明 由 Weitzenböck 公式知

$$(d+\delta)^2=-\Delta_0+\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}E_i^-E_j^-E_k^+E_l^++(\chi<2).$$

利用习题1.7.10中的等式，有

$$H_{ij}=\delta_{ij}+(\chi<0),$$
$$H_{ijk}=\frac{1}{2}\sum_l R_{lijk}(\xi)y_l+(\chi<1).$$

从而

$$\Delta_0=\sum\Big(H^{ji}\frac{\partial}{\partial y_j}+H^{si}H_{skl}\omega_k\wedge i(E_l)\Big)$$
$$\times\Big(H^{mi}\frac{\partial}{\partial y_m}+H^{qi}H_{q\alpha\beta}\omega_\alpha\wedge i(E_\beta)\Big)$$
$$-\sum\Big(H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}\frac{\partial}{\partial y_j}+H^{\alpha i}H^{\beta j}H_{\alpha\beta i}H_{jkl}\omega_k\wedge i(E_l)\Big)$$
$$=\sum\Big(\delta_{ji}\frac{\partial}{\partial y_j}-\frac{1}{8}\delta_{si}R_{askl}(\xi)y_aE_k^-E_l^-\Big)$$
$$\times\Big(\delta_{mi}\frac{\partial}{\partial y_m}-\frac{1}{8}\delta_{qi}R_{bq\alpha\beta}(\xi)y_bE_\alpha^-E_\beta^-\Big)+(\chi<2)$$
$$=\sum\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{1}{4}\sum R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}E_\alpha^-E_\beta^-$$
$$-\frac{1}{64}\sum R_{iskl}(\xi)R_{sj\alpha\beta}(\xi)y_iy_jE_k^-E_l^-E_\alpha^-E_\beta^-+(\chi<2).$$

于是命题得证.

根据 $U^{(i)}(y)$ 满足的方程

$$\begin{cases}\Big(\hat{d}+i+\dfrac{\hat{d}G}{4G}\Big)U^{(i)}(y)=-\Delta^\sigma U^{(i-1)}(y);\\ U^{(-1)}(y)\equiv 0;\\ U^{(0)}(0)=1:(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi\to(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi.\end{cases}\tag{6.2.5}$$

可以求出 $U^{(0)}(y)$. 具体求法如下: 令

$$h(y)=\log G^{\frac{1}{4}},$$

于是
$$\hat{\partial}h(y)=\hat{\partial}\log G^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}\hat{\partial}\log G=\frac{\hat{\partial}G}{4G}.$$

从而
$$\hat{\partial}e^{-h(y)}=-\frac{\hat{\partial}G}{4G}e^{-h(y)}.$$

又有
$$e^{-h(0)}=1,$$

故

$$U^{(0)}(y)=e^{-h(y)}:(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi\to(\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi.$$

引理 6.2.6 等式

$$U^{(i)}(\hat{m})=\sum_{s_1,\cdots,s_i}\frac{a_{s_1}\cdots a_{s_i}}{\Gamma(s_1,\cdots,s_i;m)}U^{(0)}(\widehat{m+s_1+\cdots+s_i})+\sum_j h_jU^{(0)}(\hat{m}_j),$$

成立, 其中
$$U^{(i)}=U^{(i)}(y),$$

$$\Gamma(s_1,\cdots,s_i;m)=\prod_{j=1}^{i-1}(m+i-j+s_1+\cdots+s_j),$$

上面和式中的 $s_1,\cdots,s_i$ 须取得使 $\Gamma(s_1,\cdots,s_i;m)$ 的各因子为正数, h_j 是一个表达式, 使得

$$h_j=0+(\chi<2i),$$

a_s 的定义如下:

$$a_s=\begin{cases}\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, & \text{当 } s=2;\\ -\frac{1}{4}\sum R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}E_\alpha^-E_\beta^- & \\ \quad -\frac{1}{8}\sum R_{ijkl}(\xi)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^-, & \text{当 } s=0;\\ -\frac{1}{64}\sum R_{itkl}^{\cdot\cdot}(\xi)R_{tj\alpha\beta}(\xi)y_iy_jE_k^-E_l^-E_\alpha^-E_\beta^-, & \text{当 } s=-2;\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

证明 由命题 6.2.5, $U^{(i)}(y)$满足的方程(6.2.5)可以写为

$$\left(\hat{\partial}+i+\frac{\hat{\partial}G}{4G}\right)U^{(i)}(y)=(a_2+a_0+a_{-2}+(\chi<2))U^{(i-1)}(y).$$

考虑上述泰勒级数等式的m次式，利用

$$\hat{\partial}U(\hat{m})=mU(\hat{m}),\ \frac{\hat{\partial}G}{4G}=\hat{\partial}h,$$

便得到

$$\begin{aligned}(m+i)U^{(i)}(\hat{m})+\sum_{m_1+m_2=m} m_1h(\hat{m}_1)\cdot U^{(i)}(\hat{m}_2)\\ =a_2U^{(i-1)}(\widehat{m+2})+a_0U^{(i-1)}(\hat{m})\\ +a_{-2}U^{(i-1)}(\widehat{m-2})+\sum_j f_jU^{(i-1)}(\hat{m}),\end{aligned}$$

其中 $$f_j=0+(\chi<2).$$

于是得到以下公式$(F_{i,m})$:

$$\begin{aligned}U^{(i)}(\hat{m})=\frac{1}{m+i}\{-\sum m_1h(\hat{m}_1)U^{(i)}(\hat{m}_2)\\ +\sum_s a_sU^{(i-1)}(\widehat{m+s})+\sum f_iU^{(i-1)}(\hat{m})\}.\end{aligned}$$

由于$h(\hat{0})=h(0)=0$，故上述公式$(F_{i,m})$中右端的项中$m_1\geqslant1$(即$m_2\leqslant m-1$)．将公式(F_{i,m_2})代入上式，并重复作类似代入，使得右端含$U^{(i)}(\hat{m}_2)$时，m_2不断减少以致为负数．从而右端不含$U^{(i)}(\hat{m}_2)$．于是便得下列公式(Φ_i):

$$U^{(i)}(\hat{m})=\frac{1}{m+i}\sum_s a_sU^{(i-1)}(\widehat{m+s})+\sum_j g_jU^{(i-1)}(\hat{m}_j),$$

其中 $$g_j=0+(\chi<2).$$

在估计g_j的χ值时，我们需用到下列等式

$$\chi(a_s)=2,\quad \forall s=2,\ 0,\ -2.$$

以公式(Φ_{i-1})代入公式(Φ_i)的右端，并重复类似的代入，便得到引理6.2.6中欲证的等式．

命题6.2.7 设M是$2l$维定向黎曼流形，

$$D=d+\delta:\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)$$

是Signature算子．令

$$\Delta_\pm=(d+\delta)^2:\Lambda_\pm(M)\to\Lambda_\pm(M),$$

$$H(t,\ y,\ \xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^{2l}}\sum_{i=0}^{\infty}t^iU_\pm^{(i)}(\xi,\ y)$$

是热算子 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta_{\pm}$ 的 MP 拟基本解. 则

（i）对于 $i<l$,

$$\operatorname{tr} U_{+}^{(i)}(\xi,\xi)-\operatorname{tr} U_{-}^{(i)}(\xi,\xi)=0.$$

（ii）$(4\pi)^{l}\cdot \operatorname{loc.ind}(D)\equiv \operatorname{tr} U_{+}^{(l)}(\xi,\xi)-\operatorname{tr} U_{-}^{(l)}(\xi,\xi)$

$$=\widehat{\operatorname{tr}}\, V^{(l)}(0),$$

其中 $V^{(l)}(0)$ 是满足下列方程的 $V^{(l)}(y)$ 在 $y=0$ 处取的值.

$$V^{(i)}: M_{\xi}\to \operatorname{Hom}((\Lambda_{+}(M)+\Lambda_{-}(M))_{\xi},\ (\Lambda_{+}(M)+\Lambda_{-}(M))_{\xi}).$$

满足

$$\begin{cases}(\hat{d}+i)V^{(i)}(y)=(b_2+b_0+b_{-2})V^{(i-1)}(y);\\ V^{(-1)}(y)\equiv 0;\\ V^{(0)}(0)=1:(\Lambda_{+}(M)+\Lambda_{-}(M))_{\xi}\to(\Lambda_{+}(M)+\Lambda_{-}(M))_{\xi}.\end{cases}$$

此处
$$b_2=a_2=\sum\frac{\partial^2}{\partial y_i^2},$$

$$b_{-2}=a_{-2}=-\frac{1}{64}\sum R_{iskl}(\xi)R_{sj\alpha\beta}(\xi)y_iy_jE_{k}^{-}E_{l}^{-}E_{\alpha}^{-}E_{\beta}^{-},$$

$$b_0=-\frac{1}{8}\sum R_{ijkl}(\xi)E_{i}^{+}E_{j}^{+}E_{k}^{-}E_{l}^{-}.$$

证明　由于

$$\operatorname{tr} U_{+}^{(i)}(\xi,\xi)-\operatorname{tr} U_{-}^{(i)}(\xi,\xi)=\widehat{\operatorname{tr}}\, U^{(i)}(0),$$

其中 $U^{(i)}(y)$ 满足前面的方程(6.2.5)，故根据引理 6.2.6 中的等式知：当 $i<l$ 时,

$$U^{(i)}(y)=0+(\chi<2i)=0+(\chi<2l),$$

即得命题中(i)的证明. 对于 $i=l$ 的情形, 有

$$\operatorname{tr} U_{+}^{(l)}(\xi,\xi)-\operatorname{tr} U_{-}^{(l)}(\xi,\xi)=\widehat{\operatorname{tr}}\, U^{(l)}(0).$$

现在仔细考察 $U^{(l)}(0)$. 引理 6.2.6 中有关于 $U^{(l)}(\hat{0})=U^{(l)}(0)$ 的等式. 我们希望将等式中的所有 a_{s_j} 全部换为 b_{s_j}，而不影响 $\widehat{\operatorname{tr}}\, U^{(l)}(0)$. 换句话说, 我们要证明

$$\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{a_{s_1}\cdots a_{s_l}}{\Gamma(s_1,\cdots,s_l;0)}\,U^{(0)}\widehat{(s_1+\cdots+s_l)}$$
$$=\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1,\cdots,s_l;0)}\,U^{(0)}\widehat{(s_1+\cdots+s_l)}+(\chi<2l).$$

由于　　$a_2=b_2,\quad a_0=b_0+b_0',\quad a_{-2}=b_2,$

此处　　$b_0'=-\frac{1}{4}\sum R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}E_\alpha^-E_\beta^-,$

我们将上式的左端按 b_2、b_0、b_0'、b_2 展开为一个新的和式．只要能证明在新的和式中任何一个包含 b_0' 的单项式的 χ 小于 $2l$，则欲证的等式就得证了．设 $c_1,\cdots,c_l\in\{b_2,b_0,b_0',b_{-2}\}$，并且 $c_1,\cdots,c_l$ 之中必有一个是 b_0'，考虑

$$c_1\cdots c_lU^{(0)}(\hat{m}).$$

如果 $c_l=b_0'$，那么

$$c_lU^{(0)}(\hat{m})=-\frac{1}{4}\sum_{i,j,\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_iE_\alpha^-E_\beta^-\cdot\left(\frac{\partial}{\partial y_j}U^{(0)}(\hat{m})\right)$$
$$=0+(\chi\leqslant 1),$$

从而　　$c_1\cdots c_{l-1}c_lU^{(0)}(\hat{m})=0+(\chi\leqslant 2l-1).$

如果 $c_l\neq b_0'$，我们将把 b_0' 换到 c_l 所处的位置．为此需要估计换位子 $[b_0',b_2]$、$[b_0',b_0]$、$[b_0',b_{-2}]$ 的 χ．易见

$$[b_0',b_0]=0+(\chi<4).$$

利用 $R_{ijkl}(\xi)=-R_{jikl}(\xi)$ 可知

$$[b_0',b_2]=0+(\chi<4).$$

为了估计 $[b_0',b_{-2}]$，我们引入一些记号．过去我们有

$$A_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(\xi)E_\alpha^-E_\beta^-.$$

现令　　$$A_{ij}^k=\sum_{s_1,\cdots,s_{k-1}}A_{is_1}A_{s_1s_2}\cdots A_{s_{k-1}j},$$

$$\mathrm{tr}A^k=\sum_i A_{ii}^k,$$

$$A^k(y)=\sum_{i,j}y_iy_jA_{ij}^k.$$

由于 $A_{ij}=-A_{ji}$，所以

$$\mathrm{tr}\,A^{2k+1}=0+(\chi<4k+2),$$

$$A^{2k+1}(y)=0+(\chi<4k).$$

（记号 $\mathrm{tr}\,A^k$ 暂时还不需要，但在证明以后的命题时要用，故现在一并引进）．于是

$$[b_0', b_{-2}]=\left[-\frac{1}{2}A_{ij}y_i\frac{\partial}{\partial y_j}, \ -\frac{1}{16}A^2(y)\right]$$

$$=\frac{1}{16}A^3(y)+(\chi<4)=0+(\chi<4).$$

这样一来,

$$U^{(l)}(\hat{0})=\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{a_{s_1}\cdots a_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)}U^{(0)}(\widehat{s_1+\cdots+s_l})+(\chi<2l)$$

$$=\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)}U^{(0)}(\widehat{s_1+\cdots+s_l})+(\chi<2l).$$

在上述等式右端的和式中,若

$$s_1+\cdots+s_l\neq 0,$$

则

$$U^{(0)}(\widehat{s_1+\cdots+s_l})=0+(\chi\leqslant -1),$$

从而

$$\frac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)}U^{(0)}(\widehat{s_1+\cdots+s_l})=0+(\chi<2l).$$

于是在 $U^{(l)}(\hat{0})$ 的等式中可以用 1 代换 $U^{(0)}(y)$. 命题 6.2.7(ii) 中的 $V^{(l)}(y)$ 有下列性质:

$$\begin{cases} V^{(0)}(y)\equiv 1, \\ V^{(l)}(\hat{0})=\sum\limits_{s_1,\cdots,s_l}\dfrac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)}V^{(0)}(\widehat{s_1+\cdots+s_l}). \end{cases}$$

所以

$$U^{(l)}(\hat{0})=V^{(l)}(\hat{0})+(\chi<2l).$$

利用引理 6.2.4 即得命题的证明.

命题 6.2.7 显然给了本节开始处的问题 1 一个圆满的回答,而且解决了第 4 章 § 4.4 中 Mckean-Singer 问题(i).

现在让我们来考察命题 6.2.7 的证明中的等式

$$V^{(l)}(\hat{0})=\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)}V^{(0)}(\widehat{s_1+\cdots+s_l}).$$

注意到 $V^{(0)}\equiv 1$, 不难看出上式可改写为

$$V^{(l)}(\hat{0})=\left(\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)}1\right)_{y=0}.$$

下面考虑和式:

$$\tilde{V}^{(l)}\equiv\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)}1.$$

如果上式中某一单项

$$\frac{b_{s_1}\cdots b_{s_l}}{\Gamma(s_1, \cdots, s_l; 0)} 1$$

中 $b_{s_l}=b_2$，则此项为零．如果 $b_{s_l}\neq b_2$ 但 $b_{s_1}\cdots b_{s_l}$ 中含 b_2，我们把这个 b_2 换到 b_{s_l} 所在的位置，从而把该项去掉．换位手续会出现一些含换位子的项．这些换位子是

$$[b_2, b_0]=0,$$

$$\begin{aligned}[b_2, b_{-2}] &= \sum_{i,\alpha,\beta} \frac{-1}{16}\left[\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, A^2_{\alpha\beta} y_\alpha y_\beta\right] \\ &= -\frac{1}{16}\sum_{i,\alpha,\beta} A^2_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, y_\alpha y_\beta\right] \\ &= -\frac{1}{16}\operatorname{tr} A^2 - \frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta} A^2_{\alpha\beta} y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta}.\end{aligned}$$

再把含上述换位子的项中的 b_2(如果有的话)换到最右端位置．这时又产生新的换位子

$$[b_2, \operatorname{tr} A^2]=0,$$

$$\begin{aligned}\left[b_2, \sum A^2_{\alpha\beta} y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right] &= \sum_{i,\alpha,\beta} A^2_{\alpha\beta}\left[\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right] \\ &= 2\sum_{\alpha,\beta} A^2_{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}.\end{aligned}$$

经过上述处理，$\tilde{V}^{(l)}$ 可以写成下列形式：

$$\begin{aligned}\tilde{V}^{(l)} = &\sum f_i\left(b_0, b_{-2}, \operatorname{tr} A^2, \sum A^2_{\alpha\beta} y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta}, \sum A^2_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}\right)1 \\ &+(\chi<2l),\end{aligned}$$

其中 f_i 是由 b_0、b_{-2}、$\operatorname{tr} A^2$、$\sum A^2_\alpha y_\alpha \frac{\partial}{\partial y_\beta}$、$\sum A^2_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$ 构成的单项式，并且

$$\chi(f_i)=2l.$$

由于 f_i 中的变元不是可交换的，所以自此以后关于 $\tilde{V}^{(l)}$ 的等式皆带余项 $(\chi<2l)$．对于算子 $\sum A^2_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha \partial y_\beta}$ 作类似于关于算子 $\sum\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ 的处理．用到下列换位子等式：

$$\begin{cases}\left[\sum A_{ij}^{2k}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j},\ b_0\right]=0+(\chi<4k+4);\\ \left[\sum A_{ij}^{2k}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j},\ b_{-2}\right]=-\frac{1}{16}\operatorname{tr}A^{2(k+1)}\\ \qquad\qquad -\frac{1}{4}\sum A_{ij}^{2(k+1)}y_i\frac{\partial}{\partial y_j}+(\chi<4k+4);\\ \left[\sum A_{ij}^{2k_1}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j},\ \operatorname{tr}A^{2k_2}\right]=0+(\chi<4(k_1+k_2)+2);\\ \left[\sum A_{ij}^{2k_1}\frac{\partial^2}{\partial y_i\partial y_j},\ \sum A_{\alpha\beta}^{2k_2}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right]=2\sum A_{\alpha\beta}^{2(k_1+k_2)}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\\ \qquad\qquad +(\chi<4(k_1+k_2)+2).\end{cases}\tag{6.2.6}$$

最后可得

$$\tilde{V}^{(l)}=\sum g_i\Big(b_0,\ b_{-2},\ \operatorname{tr}A^2,\ \cdots,\ \operatorname{tr}A^{2m_0},\ \sum A_{\alpha\beta}^2y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\beta},\ \cdots,$$
$$\sum A_{\alpha\beta}^{2m_0}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\beta},\ \sum{}'A_{\alpha\beta}^{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\Big)+(\chi<2l),$$

其中 m_0 是 $\frac{l}{2}$ 的整数部分，即 $m_0=\left[\frac{l}{2}\right]$；项 $\sum' A_{\alpha\beta}^{2m}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}$ 只在 l 为奇数时才出现在 $\tilde{V}^{(l)}$ 的上述表达式中。当 l 为奇数时，由于

$$\chi(g_i)=\chi\left(\sum{}'A_{\alpha\beta}^{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}\right)=2l,$$

所以一旦 $\sum' A_{\alpha\beta}^{2m_0}\frac{\partial^2}{\partial y_\alpha\partial y_\beta}$ 出现在 g_i 中，则此时的

$$g_i\cdot 1=0+(\chi<2l).$$

再利用换位子等式

$$\begin{cases}\left[\sum A_{\alpha\beta}^{2k}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\beta},\ b_0\right]=0+(\chi<4k+2);\\ \left[\sum A_{\alpha\beta}^{2k_1}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\beta},\ \operatorname{tr}A^{2k_2}\right]=0+(\chi<4(k_1+k_2));\\ \left[\sum A_{\alpha\beta}^{2k_1}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\beta},\ \sum A_{ij}^{2k_2}y_iy_j\right]=2\sum A_{ij}^{2(k_1+k_2)}y_iy_j+(\chi<4(k_1+k_2)).\end{cases}\tag{6.2.7}$$

将 $\sum A_{\alpha\beta}^{2k}y_\alpha\frac{\partial}{\partial y_\beta}$ 换到单项式右端，从而这个单项式作用在 1 后为

零. 因此我们得到多项式 F_m, 使得

$$\widetilde{V}^{(l)}=\sum_m\Big(\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha\beta}E_\alpha^+E_\beta^+\Big)^m F_m(\operatorname{tr}A^2,\ \cdots,$$
$$\operatorname{tr}A^{2m_0},\ \sum A_{\alpha\beta}^2y_\alpha y_\beta,\ \cdots,\ \sum A_{\alpha\beta}^{2m_0}y_\alpha y_\beta)+(\chi<2l).$$

令 $C_{2l}(+1)$ 为以 $\{E_1^+,\ \cdots,\ E_{2l}^+\}$ 为生成元的环, 环的系数域是 $\mathrm{Hom}((\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi,\ (\Lambda_+(M)+\Lambda_-(M))_\xi)$, 令 $C_{2l}^0(+1)$ 与 $C_{2l}^{>0}(+1)$分别由集合 $\{1\}$ 与 $\{E_{i_1}^+\cdots E_{i_s}^+|s\geqslant1,\ 1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant 2l\}$ 张成的子空间. 易见

$$C_{2l}(+1)=C_{2l}^0(+1)+C_{2l}^{>0}(+1).$$

令
$$\pi_0: C_{2l}(+1)\to C_{2l}^0(+1)$$

为向因子空间的投射. 记号

$$a=b+C_{2l}^{>0}(+1)$$

是指存在 $c\in C_{2l}^{>0}(+1)$, 使得

$$a=b+c.$$

命题 6.2.8 存在一个多项式

$$F(z_1,\ \cdots,\ z_s,\ \cdots)=\sum_{4\beta_1+8\beta_2+\cdots+4m\beta_m=2l}\mu(\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_m)z_1^{\beta_1}\cdots z_m^{\beta_m},$$

使得 (i) $\widetilde{V}^{(l)}(0)=F(\operatorname{tr}A^2,\ \cdots,\ \operatorname{tr}A^{2s},\ \cdots)$
$$+(\chi<2l)+C_{2l}^{>0}(+1).$$

(ii) $\operatorname{tr}U_+^{(t)}(\xi,\ \xi)-\operatorname{tr}U_-^{(t)}(\xi,\ \xi)=\widehat{\operatorname{tr}}\,\widetilde{V}^{(l)}(0)$

$$=(-4\sqrt{-1})^l\frac{F(\operatorname{tr}\Omega^2,\ \cdots,\ \operatorname{tr}\Omega^{2s},\ \cdots)}{*1}.$$

其中 $\displaystyle \Omega_{ij}=\sum_{k<l}R_{klij}(\xi)\omega_k\wedge\omega_l=\frac{1}{2}\sum_{k,l}R_{ijkl}(\xi)\omega_k\wedge\omega_l,$

$$\operatorname{tr}\Omega^{2s}=\sum_{i_1,\cdots,i_{2s}}\Omega_{i_1i_2}\wedge\Omega_{i_2i_3}\wedge\cdots\wedge\Omega_{i_{2s}i_1}.$$

证明 由上面关于 $\widetilde{V}^{(l)}$ 的等式即知:

$$\widetilde{V}^{(l)}(0)=\sum_m\Big(\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha\beta}E_\alpha^+E_\beta^+\Big)^m F_m(\operatorname{tr}A^2,\ \cdots,\ \operatorname{tr}A^{2m_0},\ 0,\ \cdots,\ 0)$$
$$+(\chi<2l).$$

故欲证命题中的(i), 只须证明:

$$\pi_0\Big(\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha\beta}E_\alpha^+E_\beta^+\Big)^m\equiv\pi_0\Big(\sum_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{2m}}A_{\alpha_1\alpha_2}\cdots A_{\alpha_{2m-1}\alpha_{2m}}E_{\alpha_1}^+\cdots E_{\alpha_{2m}}^+\Big)$$

可以用 $\operatorname{tr}A^2,\ \cdots,\ \operatorname{tr}A^{2m_0}$ 表出. 换句话说, 只须证明下列事实就

够了：存在一个映射：

$$\theta: \gamma_{2m} \to \mathbf{R},$$

使得对于任意的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m} \in \{1, 2, \cdots, 2l\}$,

$$\pi_0(E^+_{\alpha_1} \cdots E^+_{\alpha_{2m}}) = \sum_{\tau \in \gamma_{2m}} \theta(\tau) \delta_{\alpha_{\tau(1)}\alpha_{\tau(2)}} \cdots \delta_{\alpha_{\tau(2m-1)}\alpha_{\tau(2m)}}.$$

其中 γ_{2m} 是 $2m$ 个元素集 $\{1, \cdots, 2m\}$ 的置换群. 这一事实颇有意思：它可看作是 Weyl 的正交不变量理论的推论. 由于在证明 Dirac 算子等的局部指标定理时用不到这个事实，故我们把它的证明另外写在下面一个引理(引理 6.2.9)中. 至此我们证明了(i). 由命题 5.3.4 可知

$$\widehat{\operatorname{tr}}(E^-_{i_1} \cdots E^-_{i_{2l}}) = (-4\sqrt{-1})^l \frac{\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{2l}}}{\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_{2l}},$$

从而(ii)成立. 命题得证.

在叙述引理 6.2.9 之前，我们先引入一些记号. 对于 $\tau \in \gamma_{2m}$, $k \leqslant m$, 令 $s(\tau(1), \tau(2), \cdots, \tau(2k))$ 为集合

$$\{\tau(1), \cdots, \tau(2k-2)\} \cap ((\tau(2k-1), \tau(2k)) \cup (\tau(2k), \tau(2k-1)))$$

中元素的个数，其中 $(\tau(2k-1), \tau(2k))$ 与 $(\tau(2k), \tau(2k-1))$ 是开区间. 当 $\alpha > \beta$ 时，约定开区间 $(\alpha, \beta) = \phi$. 令

$$\lambda(\tau) = \sum_{k=1}^{m} s(\tau(1), \cdots, \tau(2k)).$$

引理 6.2.9 对于任意的 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m} \in \{1, \cdots, 2l\}$,

$$\pi_0(E^+_{\alpha_1} \cdots E^+_{\alpha_{2m}}) = \sum_{\tau \in \gamma_{2m}} \frac{(-1)^{\lambda(\tau)}}{2^m \cdot m!} \delta_{\alpha_{\tau(1)}\alpha_{\tau(2)}} \cdots \delta_{\alpha_{\tau(2m-1)}\alpha_{\tau(2m)}}.$$

证明 当 $m=1$ 时，引理显然成立. 因此我们对 $m>1$ 证明引理. 令

$$\varphi_1(E^+_{\alpha_1} \cdots E^+_{\alpha_{2m}}) = \sum_{s=2}^{2m} (-1)^s \delta_{\alpha_1\alpha_s} \pi_0(\widehat{E^+_{\alpha_1}} E^+_{\alpha_2} \cdots E^+_{\alpha_{s-1}} \widehat{E}^+_{\alpha_s} \cdots E^+_{\alpha_{2m}}),$$

其中记号 $\widehat{E^+_{\alpha_1}}$ 表示元素 $E^+_{\alpha_1}$ 被删除. 为着下面陈述方便计，我们把 $E^+_{\alpha_1} \cdots E^+_{\alpha_{2m}}$ 中删除 $E^+_{\alpha_s}$, $E^+_{\alpha_k}$ 记作

$$(E^+_{\alpha_1} \cdots E^+_{\alpha_{2m}} /\!/ \{E^+_{\alpha_s}, E^+_{\alpha_k}\}).$$

现在证明： $\pi_0(E^+_{\alpha_1} \cdots E^+_{\alpha_{2m}}) = \varphi_1(E^+_{\alpha_1} \cdots E^+_{\alpha_{2m}})$.

对于任意的 $s\in\{2, 3, \cdots, 2m+1\}$，只要 $\alpha_s\neq\alpha_{s+1}$，并且 α_s 与 α_{s+1} 中有一个是 α_1，那么易见

$$\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_s}E^+_{\alpha_{s+1}}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})=-\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{s+1}}E^+_{\alpha_s}\cdots E^+_{\alpha_{2m}}),$$

$$\varphi_1(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_s}E^+_{\alpha_{s+1}}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})=-\varphi_1(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{s+1}}E^+_{\alpha_s}\cdots E^+_{\alpha_{2m}}).$$

所以只须在下列情形：

$$\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_{2k},\ 且当\ s>2k\ 时,\ \alpha_s\neq\alpha_1$$

下证明 $\pi_0=\varphi_1$. 此时易见

$$\begin{aligned}\varphi_1(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})&=\sum_{s=2}^{2k}(-1)^s\delta_{\alpha_1\alpha_s}\pi_0((E^+_{\alpha_1})^{2k-2}E^+_{2k+1}\cdots E^+_{2m})\\&=\pi_0((E^+_{\alpha_1})^{2k-2}E^+_{\alpha_{2k+1}}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})\\&=\pi_0((E^+_{\alpha_1})^{2k}E^+_{\alpha_{2k+1}}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})\\&=\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}}).\end{aligned}$$

故欲证的事实成立. 类似地，若令

$$\varphi_s(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})=\sum_{j\neq s}(-1)^{j+s+1}\delta_{\alpha_j\alpha_s}\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}}/\!/\{E^+_{\alpha_j}, E^+_{\alpha_s}\}),$$

则

$$\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})=\varphi_s(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}}).$$

所以

$$\begin{aligned}\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})&=\frac{1}{2m}\sum_{s=1}^{2m}\varphi_s(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})\\&=\frac{1}{2m}\sum_{\substack{j,s\\ j\neq s}}(-1)^{j+s+1}\delta_{\alpha_j\alpha_s}\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}}/\!/\{E^+_{\alpha_j}, E^+_{\alpha_s}\})\\&=\frac{1}{(2m)(2m-2)}\sum_{\substack{s(1),s(2),s(3),s(4)\\ 互不相同}}(-1)^{s(1)+s(2)+1}\\&\quad\times(-1)^{s(3)+s(4)+1+s(s(1),\cdots,s(4))}\\&\quad\times\delta_{s(1)s(2)}\delta_{s(3)s(4)}\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}}/\!/\{E^+_{s(1)}, \cdots, E^+_{s(4)}\})\\&=\frac{1}{(2m)!!}\sum_{\substack{s(1),\cdots,s(2m)\\ 互不相同}}(-1)^{m+\sum_{i=1}^{2m}s(i)+\sum_{k=1}^{m}s(s(1),\cdots,s(2k))}\\&\quad\times\delta_{\alpha_{s(1)}\alpha_{s(2)}}\cdots\delta_{\alpha_{s(2m-1)}\alpha_{s(2m)}}.\end{aligned}$$

上式中 $s(i)$ 按通常记号应记为 s_i. 为了使上式中下标不致太多，故记为 $s(i)$. 由于 $s(1), \cdots, s(2m)$ 互不相同，故可以把 s 理解为 $\mathcal{T}_{2m}$ 中一个元素，使得 $s(i)$ 就是 s 在 i 上的作用. 于是

$$\sum_{k=1}^{m} s(s(1),\cdots,s(2k))=\lambda(s).$$

又由于 $\quad m+\sum_{i=1}^{2m} s(i)=m+\dfrac{(2m+1)2m}{2}=2m(m+1),$

故

$$\pi_0(E^+_{\alpha_1}\cdots E^+_{\alpha_{2m}})=\frac{1}{(2m)!!}\sum_{s\in\gamma_{2m}}(-1)^{\lambda(s)}\delta_{\alpha_{s(1)}\alpha_{s(2)}}\cdots\delta_{\alpha_{s(2m-1)}\alpha_{s(2m)}}.$$

引理证毕.

命题6.2.8圆满地回答了本节开始处的问题2．现在我们来处理问题3．在命题6.2.8中的多项式F还没有用一种简明的方式表示出来．它是从命题6.2.7(ii)中$V^{(t)}(y)$的方程出发，经过对算子$b_{s_1}\cdots b_{s_i}$作复杂的换位处理得到的．因此为了解决问题3，必须对上面提到的复杂的换位处理有进一步理解．下面我们从$W^{(t)}(y)$的方程出发，作类似的换位处理，而后将所得的结果和命题6.2.8中的F作比较．过去我们曾经用过代换

$$(A_{ij})=\begin{pmatrix} 0 & x_1 & & & \\ -x_1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & x_l \\ & & & -x_l & 0 \end{pmatrix},$$

于是有下列的形式计算：

$$\begin{aligned}
A_{ij}&=\Big(\sum_{s=1}^{l} x_s(\theta_{2s-1,2s}-\theta_{2s,2s-1})\Big)_{ij}\\
&=\sum_{s=1}^{l} x_s(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1}),\\
b_0&=-\frac{1}{8}\sum R_{ijkl}(\xi)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^-\\
&=-\frac{1}{4}\sum_{i,j}A_{ij}E_i^+E_j^+\\
&=-\frac{1}{4}\sum_{s=1}^{l}\sum_{i,j}x_s(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1})E_i^+E_j^+\\
&=-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}x_sE^+_{2s-1}E^+_{2s},
\end{aligned}$$

$$b_{-2}=-\frac{1}{64}\sum R_{imkl}(\xi)R_{mj\alpha\beta}(\xi)y_iy_jE_k^-E_l^-E_\alpha^-E_\beta^-$$
$$=-\frac{1}{16}\sum A_{im}A_{mj}y_iy_j$$
$$=\frac{1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2),$$
$$\operatorname{tr}A^{2k}=2\cdot(-1)^k\cdot\sum_{s=1}^{l}x_s^{2k}.$$

利用上面的代换，我们可将命题 6.2.7(ii) 中的 $V^{(i)}(y)$ 的方程变为下列命题 6.2.10 中的方程.

命题 6.2.10 设 $W^{(i)}: M_\xi\to\mathbf{R}$ $(i=0, 1, 2, \cdots)$ 满足下列方程：

$$\begin{cases}\left(\sum_j y_j\frac{\partial}{\partial y_j}+i\right)W^{(i)}(y)=\left[\sum_{j=1}^{2l}\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}+\frac{1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)\right.\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\left.-\frac{1}{2}\sum_{s=1}^{l}x_s\alpha_s\right]W^{(i-1)}(y);\\ W^{(-1)}(y)\equiv0;\\ W^{(0)}(0)=1\in\mathbf{R}.\end{cases}$$

其中 M_ξ 是点 ξ 的一个小邻域；x_s 和 α_s 是参变量，它们之间的乘法可交换，并且 $\alpha_s^2=-1$. 则

（i）$W^{(0)}(y)\equiv1$,

$$W^{(l)}(\hat{0})=\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{\tilde{b}_{s_1}\cdots\tilde{b}_{s_l}}{\Gamma(s_1,\cdots,s_l;0)}W^{(0)}(\widehat{s_1+\cdots+s_l}),$$

其中
$$\tilde{b}_s=\begin{cases}\sum_j\frac{\partial^2}{\partial y_j^2}, & \text{如果 } s=2;\\ -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{l}x_i\alpha_i, & \text{如果 } s=0;\\ \frac{1}{16}\sum_{i=1}^{l}x_i^2(y_{2i-1}^2+y_{2i}^2), & \text{如果 } s=-2;\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

（ii）若令
$$\widetilde{W}^{(l)}=\sum_{s_1,\cdots,s_l}\frac{\tilde{b}_{s_1}\cdots\tilde{b}_{s_l}}{\Gamma(s_1,\cdots,s_l;0)}1,$$

则

$$\widehat{W}^{(l)}=\sum_{m}\left(2\sum_{s=1}^{l}x_s a_s\right)^m F_m(2\cdot(-1)\cdot\sum x_s^2,\ \cdots,\ 2(-1)^{m_s}\sum x_s^{2m_s},$$
$$\widetilde{\sum A_{\alpha\beta}^2 y_\alpha y_\beta},\ \cdots,\ \widetilde{\sum A_{\alpha\beta}^{2m_s} y_\alpha y_\beta}),$$

其中 F_m 就是过去表示 $\widehat{V}^{(l)}$ 时用过的多项式 F_m;

$$\widetilde{\sum A_{\alpha\beta}^{2k} y_\alpha y_\beta}=(-1)^k\sum_{s=1}^{l}x_s^{2k}(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2).$$

(iii) 令 $\mathrm{Ring}(a_1,\ \cdots,\ a_l)$是由 $a_1,\ \cdots,\ a_l$ 生成的交换环，其中 $a_s^2=-1$ $(s=1,\ \cdots,\ l)$. 令 $\tilde{\pi}_0$ 是 $\mathrm{Ring}(a_1,\ \cdots,\ a_l)$向系数环的投射. 则

$$\tilde{\pi}_0 W^{(l)}(0)=\tilde{\pi}_0\widehat{W}^{(l)}(0)$$
$$=F\left(2\cdot(-1)\cdot\sum_{i=1}^{l}x_i^2,\ \cdots,\ 2(-1)^s\sum_{i=1}^{l}x_i^{2s},\ \cdots\right),$$

其中 F 就是命题6.2.8 中的多项式 $F(z_1,\ \cdots,\ z_s,\ \cdots)$.

证明 采用过去对 $V^{(l)}$处理的一切手续来处理 $W^{(l)}$, 易知(i)与(ii)成立，如果在(ii)的结论中关于 $\widehat{W}^{(l)}$ 的表达式里令 $a_s=E_{2s-1}^+E_{2s}^+$, 得

$$(\widehat{W}^{(l)}\,|\,a_s=E_{2s-1}^+E_{2s}^+).$$

易知

$$\pi_0(\widehat{W}^{(l)}(0)\,|\,a_s=E_{2s-1}^+E_{2s}^+)$$
$$=F\left(2\cdot(-1)\cdot\sum_{i=1}^{l}x_i^2,\ \cdots,\ 2(-1)^s\sum_{i=1}^{l}x_i^{2s},\ \cdots\right).$$

由于 Φ: $\mathrm{Ring}(a_1,\ \cdots,\ a_l)\to\mathrm{Ring}(E_1^+E_2^+,\ \cdots,\ E_{2l-1}^+E_{2l}^+)$
是环同构，而且

$$\pi_0\Phi=\tilde{\pi}_0,$$

所以(iii)成立. 命题证毕.

引理 6.2.11 记号同前，则

$$F\left(2\cdot(-1)\sum_{i=1}^{l}x_i^2,\ \cdots,\ 2(-1)^s\sum_{i=1}^{l}x_i^{2s},\ \cdots\right)$$
$$=\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2}x_s}{\tanh\frac{\sqrt{-1}}{2}x_s}\right](\hat{l}),$$

上式右端中的记号 $\hat{l}$ 表示关于 $x_1,\ \cdots,\ x_l$ 的泰勒展式中取 l 次

的部分.

证明 令

$$H(t, y_1, \cdots, y_{2l}) = \frac{\exp\left(-\frac{|y|^2}{4t}\right)}{(\sqrt{4\pi t})^{2l}} \sum_{i=0}^{\infty} W^{(i)}(y_1, \cdots, y_{2l}) t^i,$$

其中 $W^{(i)}$ 满足命题 6.2.10 中的方程. 于是 $H(t, y)$ 满足:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H}{\partial t} = \left(\sum_{i=1}^{2l} \dfrac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \dfrac{1}{16} \sum_{s=1}^{l} x_s^2 (y_{2s-1}^2 + y_{2s}^2) - \dfrac{1}{2} \sum_{s=1}^{l} x_s a_s \right) H, \\ (4\pi t)^l H(t, 0, \cdots, 0) \to 1, \text{当 } t \to 0 \text{ 时}, \end{cases}$$

由引理 6.1.2 知

$$H(t, y_1, \cdots, y_{2l}) = \prod_{s=1}^{l} \left[\frac{\sqrt{-1}\, x_s}{8\pi \cdot \operatorname{sh} \frac{\sqrt{-1} x_s t}{2}} \right.$$

$$\left. \times \exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{8} \left(x_s \cdot \coth \frac{\sqrt{-1} x_s t}{2} \right) (y_{2s-1}^2 + y_{2s}^2) - \frac{a_s x_s t}{2} \right) \right].$$

于是

$$W^{(l)}(0) = \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} [(4\pi t)^l H(t, 0, \cdots, 0)] \right)_{t=0}$$

$$= \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial^l}{\partial t^l} \left[\prod_{s=1}^{l} \left(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2} x_s t}{\sinh \frac{\sqrt{-1} x_s t}{2}} e^{-\frac{a_s x_s t}{2}} \right) \right] \right)_{t=0}$$

$$= \left[\prod_{s=1}^{l} \frac{\frac{\sqrt{-1}}{2} x_s}{\sinh \frac{\sqrt{-1} x_s}{2}} e^{-\frac{a_s x_s}{2}} \right] (\hat{l}),$$

$$F\left(2 \cdot (-1) \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^2, \cdots, 2(-1)^s \sum_{i=1}^{l} x_i^{2s}, \cdots \right) = \tilde{\pi}_0 W^{(l)}(0)$$

$$= \left\{ \left[\prod_{s=1}^{l} \frac{\frac{\sqrt{-1}}{2} x_s}{\sinh \frac{\sqrt{-1} x_s}{2}} \right. \right.$$

$$\left. \left. \times \frac{\exp\left(-\frac{a_s x_s}{2}\right) + \exp\left(\frac{a_s x_s}{2}\right)}{2} \right] (\hat{l}) \right\}_{a_s = \sqrt{-1}}$$

$$=\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2}x_s}{\tanh\frac{\sqrt{-1}}{2}x_s}\right](\hat{l}).$$

引理得证.

定理 6.2.12 设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形,

$$D\equiv(d+\delta):\Lambda_+(M)\to\Lambda_-(M)$$

是 Signature 算子, $\mathrm{loc.ind}(D)$ 是它的局部指标(见定义 4.4.9), 则

$$\mathrm{loc.ind}(D)=\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tanh u_s}\right)(E_1,\cdots,E_{2l}),$$

其中 $\{E_1,\cdots,E_{2l}\}$ 是局部顺向幺正标架场; $u_1,\cdots,u_l$ 是陈根, 并按照定义 3.3.1 来理解等式的右端.

证明 由定义 4.4.9、命题 6.2.8、引理 3.3.2 和引理 6.2.11, 有下列计算:

$$(\mathrm{loc.\ ind}(D))(\xi)=\frac{1}{(4\pi)^l}(\mathrm{tr}\,U_+^{(l)}(\xi,\xi)-\mathrm{tr}\,U_-^{(l)}(\xi,\xi))$$

$$=\frac{(-4\sqrt{-1})^l}{(4\pi)^l}F(\mathrm{tr}\,\Omega^2,\cdots,\mathrm{tr}\,\Omega^{2s},\cdots)(E_1,\cdots,E_{2l})$$

$$=\frac{(-4\sqrt{-1})^l}{(4\pi)^l}F(\cdots,(-1)^s2(2\pi)^s$$
$$\times(u_1^{2s}+\cdots+u_l^{2s}),\cdots)(E_1,\cdots,E_{2l})$$

$$=\frac{(-4\sqrt{-1})^l}{(4\pi)^l}(2\pi)^lF(\cdots,(-1)^s2(u_1^{2s}+\cdots+u_l^{2s}),\cdots)$$
$$\times(E_1,\cdots,E_{2l})$$

$$=\left[(-2\sqrt{-1})^l\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2}u_s}{\tanh\frac{\sqrt{-1}}{2}u_s}\right](\hat{l})(E_1,\cdots,E_{2l})$$

$$=\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tanh u_s}\right](\hat{l})(E_1,\cdots,E_{2l})$$

$$=\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tanh u_s}\right)(E_1,\cdots,E_{2l}).$$

定理证毕.

第 7 章

de Rham–Hodge 算子与 Dirac 算子的局部指标定理

§7.1 de Rham–Hodge 算子的局部指标定理

设 M 是 n 维黎曼流形(不必是可定向的),

$$D_0 = d+\delta: \Lambda^{\text{even}}(M) \to \Lambda^{\text{odd}}(M)$$

是定义 1.6.9 中的 de Rham-Hodge 算子. 令 $\Lambda^*(M)$ 的超结构由下式决定:

$$\Lambda^*(M) = \Lambda^{\text{even}}(M) + \Lambda^{\text{odd}}(M).$$

又令

$$\Delta = (d+\delta)^2: \Lambda^*(M) \to \Lambda^*(M),$$

$\dfrac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的 MP 拟基本解是

$$H(t, y, \xi) = \frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^n} \sum_{i=0}^{\infty} t^i U^{(i)}(\xi, y): \Lambda^*(M)|_{\xi} \to \Lambda^*(M)|_y.$$

于是 de Rham-Hodge 算子 D_0 的局部指标为

$$(\text{loc.ind}(D_0))(\xi) = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 是奇数;} \\ \dfrac{1}{(\sqrt{4\pi})^n} \widehat{\text{tr}}\, U^{(l)}(\xi, \xi), & \text{当 } n=2l. \end{cases}$$

以后我们就限制在 $n=2l$ 的情形下讨论 D_0 的局部指标问题. 仿照定义 6.2.2, 我们来给出论证 de Rham-Hodge 算子局部指标定理所需要的 χ. 根据命题 5.3.2, 有以下定义:

定义 7.1.1 设有表达式

$$\alpha = \varphi_{\alpha_1}(y) \frac{\partial}{\partial y_{\beta_1}} \varphi_{\alpha_2}(y) \cdots \frac{\partial}{\partial y_{\beta_m}} \varphi_{\alpha_{m+1}}(y) E^+_{i_1} \cdots E^+_{i_p} E^-_{j_1} \cdots E^-_{j_q},$$

令

$$\chi(\alpha) = m - \nu(\varphi_{\alpha_1} \cdots \varphi_{\alpha_{m+1}}) + p + q.$$

并由此对映射

$$\omega_1,\ \omega_2: M_\xi \to \mathrm{Hom}((\Lambda^{\mathrm{even}}(M)+\Lambda^{\mathrm{odd}}(M))_\xi,\ (\Lambda^{\mathrm{even}}(M)+\Lambda^{\mathrm{odd}}(M))_\xi)$$

定义

$$\chi(\omega_1)<N$$

和

$$\omega_1=\omega_2+(\chi<N)$$

的概念. 其中$(y_1,\ \cdots,\ y_{2l})$是以ξ为中心的法坐标系.

引理 7.1.2 设有映射

$$\omega: M_\xi \to \mathrm{Hom}((\Lambda^{\mathrm{even}}(M)+\Lambda^{\mathrm{odd}}(M))_\xi,\ (\Lambda^{\mathrm{even}}(M)+\Lambda^{\mathrm{odd}}(M))_\xi)$$

满足

$$\chi(\omega)<4l,$$

则

$$\widehat{\mathrm{tr}}\,\omega(\xi)=0,$$

这个引理从命题 5.3.2 可直接推出, 没有必要再证了.

命题 7.1.3 下列等式成立:

$$\Delta=(d+\delta)^2=\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}(\xi)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^- + (\chi<4).$$

证明 仿照命题 6.2.5 的证明即得.

由命题 7.1.3, 仿照命题 6.2.6 的证明可得以下命题:

命题 7.1.4 设 M 是 $2l$ 维黎曼流形,

$$D_0=d+\delta: \Lambda^{\mathrm{even}}(M)\to\Lambda^{\mathrm{odd}}(M)$$

是 de Rham-Hodge 算子. 则由 D_0 给出的 $U^{(i)}(\xi,\ y)$ 有下列性质:

(i) 对于 $i<l$,

$$\widehat{\mathrm{tr}}\,U^{(i)}(\xi,\ \xi)=0;$$

(ii) $\widehat{\mathrm{tr}}\,U^{(l)}(\xi,\ \xi)=\widehat{\mathrm{tr}}\,V^{(l)}(0)$, 其中 $V^{(i)}(y)$满足:

$$\begin{cases}(\hat{d}+s)V^{(s)}(y)=-\left(\dfrac{1}{8}\sum R_{ijkl}(\xi)E_i^+E_j^+E_k^-E_l^-\right)V^{(s-1)}(y);\\ V^{(-1)}(y)=0;\\ V^{(0)}(0)=1: (\Lambda^{\mathrm{even}}(M)+\Lambda^{\mathrm{odd}}(M))_\xi \\ \qquad \to(\Lambda^{\mathrm{even}}(M)+\Lambda^{\mathrm{odd}}(M))_\xi.\end{cases}$$

定理 7.1.5 设 M 是 $2l$ 维黎曼流形,

$$D_0: \Lambda^{\text{even}}(M)\to\Lambda^{\text{odd}}(M)$$

是 de Rham-Hodge 算子, 则

$$\begin{aligned}(\text{loc.ind}(D_0))(\xi)&=\frac{1}{2^{3l}\cdot\pi^l\cdot l!}\sum_{\substack{i_1,\cdots,i_{2l}\\ j_1,\cdots,j_{2l}}}\varepsilon(i_1,\cdots,i_{2l})\varepsilon(j_1,\cdots j_{2l})\\ &\quad\times R_{i_1i_2j_1j_2}(\xi)\cdots R_{i_{2l-1}i_{2l}j_{2l-1}j_{2l}}(\xi)\\ &=\sum_{i_1,\cdots,i_{2l}}\frac{1}{2^{2l}\cdot\pi^l\cdot l!}\varepsilon(i_1,\cdots,i_{2l})\Omega_{i_1i_2}\wedge\cdots\\ &\quad\wedge\Omega_{i_{2l-1}i_{2l}}(E_1,\cdots,E_{2l}).\end{aligned}$$

证明 由命题7.1.4有

$$V^{(l)}(0)=\frac{1}{l!}\left(\frac{-1}{8}\sum_{i,j,k,s}R_{ijks}(\xi)E_i^+E_j^+E_k^-E_s^-\right)^l V^{(0)}(0),$$

所以又由命题5.3.2有

$$\begin{aligned}(\text{loc.ind}(D_0))(\xi)&=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\text{tr}}\,V^{(l)}(0)\\ &=\frac{1}{2^{3l}\cdot\pi^l\cdot l!}\sum\varepsilon(i_1,\cdots,i_{2l})\varepsilon(j_1,\cdots,j_{2l})\\ &\quad\times R_{i_1i_2j_1j_2}(\xi)\cdots R_{i_{2l-1}i_{2l}j_{2l-1}j_{2l}}(\xi).\end{aligned}$$

定理证毕.

§7.2 Dirac 算子的局部指标定理

本书介绍的 Dirac 算子是 Atiyah 与 Singer 在 60 年代初引进的. 这个算子之所以如此命名，是由于它是物理学中 Dirac 算子的推广. 现在我们先给出 Dirac 算子的确切定义，而后再讨论它的局部指标定理.

设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形,

$$\pi_1: SO(M)\to M$$

是 $SO(2l)$主丛，它由 M 上所有顺向幺正标架所组成(参见习题 1.3.4). 按通常理解，上述的流形 M 有 $\text{Spin}(2l)$结构是指: 存在一个 $\text{Spin}(2l)$主丛

$$\pi: P\to M,$$

使得 SO(2l)主丛

$$\widetilde{\pi}_1: P\times_{\mathrm{Spin}(2l)}\mathrm{SO}(2l)\to M$$

就是上面的主丛

$$\pi_1: \mathrm{SO}(M)\to M.$$

其中记号 $P\times_{\mathrm{Spin}(2l)}\mathrm{SO}(2l)$ 的定义可以参见第 3 章 § 3.2，也可以用第 1 章 § 1.4 中的商空间 $P\times_\rho\mathrm{SO}(2l)$ 作为 $P\times_{\mathrm{Spin}(2l)}\mathrm{SO}(2l)$ 的定义，其中 ρ 是群 Spin(2l)在集合 SO(2l)上的左作用

$$\rho: \mathrm{Spin}(2l)\times\mathrm{SO}(2l)\to\mathrm{SO}(2l): (a, A)\mapsto\rho(a)\cdot A,$$

$\rho(a)$ 的定义见命题 5.1.4. 一个 $2l$ 维定向黎曼流形上是否能有 Spin(2l)结构？如果有的话，这种结构有多少个？这两个问题在拓扑学中已有令人满意的解答，在此就不多述了. 现在假定在 M 上选出一个 Spin(2l)结构，然后再开展下面的讨论. 首先我们把选定的 Spin(2l) 结构 P 记作 Spin(M). 设 S 是旋量空间（参见注 5.1.11 的 $S(2l)$），它是一个复 2^l 维向量空间，其上有 Spin(2l)的作用. 令

$$E=\mathrm{Spin}(M)\times_{\mathrm{Spin}(2l)}S,$$

它是 M 上的一个复向量丛. 又 Spin(2l)在 Hom (S, S) 和 $\mathbf{R}^{2l}$ 上有下述作用：

$$\mathrm{Spin}(2l)\times\mathrm{Hom}(S, S)\to\mathrm{Hom}(S, S): (a, h)\mapsto a\cdot h,$$

$$\mathrm{Spin}(2l)\times\mathbf{R}^{2l}\to\mathbf{R}^{2l}: \left(a, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2l}\end{pmatrix}\right)\mapsto\rho(a)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2l}\end{pmatrix}.$$

上面 $a\cdot h$ 的定义使得对于任意的 $v\in S$，有

$$(a\cdot h)v=aha^{-1}v.$$

由上述两个作用导出 Spin(2l)在复向量空间

$$\mathbf{R}^{2l}\otimes_{\mathbf{R}}\mathrm{Hom}(S, S)\equiv\mathbf{C}^{2l}\otimes_{\mathbf{C}}\mathrm{Hom}(S, S)$$

上的一个作用. 并且易知在上述复向量空间中有一个元素

$$\tau=\sum_{i=1}^{2l}\delta_i\otimes e_i,$$

其中

$$\delta_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(\text{第 } i \text{ 行})\in \mathbf{R}^{2l},$$

$$e_i\in C_{2l}(-1)=\mathrm{Hom}(S,\ S).$$

使得 r 在 Spin$(2l)$ 作用下是不变的（请读者复阅 § 5.1，以了解 e_i 与 $C_{2l}(-1)\otimes\mathbf{C}=\mathrm{Hom}(S,\ S)$ 的含意，并验证 r 是 Spin$(2l)$ 不变这一事实）．于是在向量丛

$$\mathrm{Spin}(M)\times_{\mathrm{Spin}(2l)}(\mathbf{R}^{2l}\otimes\mathrm{Hom}(S,\ S))\equiv\mathrm{TM}\otimes\mathrm{Hom}(E,\ E)$$

的截面集

$$\Gamma(\mathrm{Hom}(E,\ E)\otimes\mathrm{ST}^1)=\Gamma(\mathrm{TM}\otimes\mathrm{Hom}(E,\ E))$$

中有一个由 r 确定的元素，记作$[r]$．

定义 7.2.1 设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形，其上有一个固定的 Spin$(2l)$ 结构．记号 Spin(M)、E、r 的意义同前．容易知道在主丛 Spin(M) 上有唯一联络 $\{\omega_\sigma\}$，使得它在向量丛

$$\begin{aligned}\mathrm{Spin}(M)\times_{\mathrm{Spin}(2l)}\mathbf{R}^{2l}&=(\mathrm{Spin}(M)\times_\rho\mathrm{SO}(2l))\times_\tau\mathbf{R}^{2l}\\ &=\mathrm{SO}(M)\times_\tau\mathbf{R}^{2l}=\mathrm{TM}\end{aligned}$$

上的诱导配联络是 Levi-Civita 联络（上式中 τ 是群 SO$(2l)$ 在 $\mathbf{R}^{2l}$ 上的标准作用：

$$\tau:\ \mathrm{SO}(2l)\times\mathbf{R}^{2l}\to\mathbf{R}^{2l}:\ \left(A,\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2l}\end{pmatrix}\right)\mapsto A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_{2l}\end{pmatrix}.$$

我们把 $\{\omega_\sigma\}$ 在 E 上的诱导配联络也称为 Levi-Civita 联络，并也记为 ∇．于是按引理 1.5.6 便有一个一阶微分算子

$$L_{[r]}:\ \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

它的限制算子

$$D_+\equiv L_{[r]}:\ \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

称为 Dirac 算子，其中

$$E_{\pm}=\mathrm{Spin}(M)\times_{\mathrm{Spin}(2l)}S^{\pm},$$

$S^{\pm}$ 是注 5.1.11 中的 $S^{\pm}(2n)$.

为了将定义 7.2.1 中的 Dirac 算子在局部参照系下表示出来，首先需要将向量丛

$$E=\mathrm{Spin}(M)\times_{\mathrm{Spin}(2l)}S$$

上的 Levi-Civita 联络表示出来，设 $\sigma: U\to\mathrm{Spin}(M)$ 是主丛 $\mathrm{Spin}(M)$ 的一个局部截面，其中 U 是 M 中的一个开集。于是向量丛的任意一个截面在局部上一定能写为 (σ, f)，其中 $f: U\to S$. 对于 M 上一个向量场 X，有

$$\nabla_X(\sigma, f)=(\sigma, Xf+\omega_\sigma(X)f),$$

这个等式曾出现在定理 1.4.9 的证明中. 上式中的 ω_σ 是主丛 $\mathrm{Spin}(M)$ 上的联络在 σ 下的表现，它是一个一次微分式取值在 $\mathrm{Spin}(2l)$ 的李代数 $\mathfrak{spin}(2l)$ 中. 由 $\mathrm{Spin}(2l)$ 在 S 上的作用导出 $\mathfrak{spin}(2l)$ 在 S 上的作用，从而 $\omega_\sigma(X)$ 便可在 f 上作用得到 $\omega_\sigma(X)f$ 了. 至于主丛 $\mathrm{Spin}(M)$ 上的联络 $\{\omega_\sigma\}$ 如何从 M 上的 Levi-Civita 联络求出，还需要一段讨论. 为简便计，我们直接给出 $\omega_\sigma(X)f$ 的定义，而把中间的验算留给读者. 在记号 $\omega_\sigma(X)f$ 中 $\omega_\sigma(X)$ 已经理解为

$$\omega_\sigma(X): U\to\mathrm{Hom}(S, S).$$

由定理 5.1.8, 上述 $\omega_\sigma(X)$ 表为

$$\omega_\sigma(X): U\to C_{2l}(-1)\otimes\mathbf{C}.$$

用群同态 $\rho: \mathrm{Spin}(2l)\to\mathrm{SO}(2l)$ 诱导出的映射

$$\begin{aligned}\rho_1: \mathrm{Spin}(M)&\equiv\mathrm{Spin}(M)\times_{\mathrm{Spin}(2l)}\mathrm{Spin}(2l)\\&\to\mathrm{Spin}(M)_{\mathrm{Spin}(2l)}\mathrm{SO}(2l)\equiv\mathrm{SO}(M),\end{aligned}$$

$\rho_1\sigma$ 是 $\mathrm{SO}(M)$ 上一个局部截面(即幺正标架场). 于是

$$\rho_1\sigma=(E_1, \cdots, E_{2l}).$$

关于 M 上的 Levi-Civita 联络 ∇, 过去曾有公式

$$\nabla_X E_i=\sum_{j=1}^{2l}\omega_{ji}(X)E_j.$$

现在令上面的 $\omega_\sigma(X)$ 为

$$\omega_\sigma(X) = -\frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}(X)e_ie_j.$$

引理 7.2.2 任取 $\mathrm{Spin}(M)$ 的局部截面 σ，用下式：

$$\nabla_X(\sigma, f) = \left(\sigma,\ Xf - \frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}(X)e_ie_jf\right)$$

确定了向量丛

$$E = \mathrm{Spin}(M)\times_{\mathrm{Spin}(2l)}S$$

上一个联络.

证明 假设又有另外一个局部截面 $\bar\sigma = \sigma\cdot g$，其中

$$g: U \to \mathrm{Spin}(2l),$$

我们要从等式 $(\sigma, f) = (\bar\sigma, \bar f)$ 推出

$$\left(\sigma,\ Xf - \frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}(X)e_ie_jf\right) = \left(\bar\sigma,\ X\bar f - \frac{1}{4}\sum_{i,j}\bar\omega_{ij}(X)e_ie_j\bar f\right),$$

即推出

$$gX\bar f - \frac{1}{4}\sum_{i,j}\bar\omega_{ij}(X)ge_ie_j\bar f = Xf - \frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}(X)e_ie_jf.$$

从 $(\sigma, f) = (\bar\sigma, \bar f)$ 推知 $\bar f = g^{-1}f$. 于是

$$\begin{aligned} gX\bar f &= g\{X(g^{-1})\cdot f + g^{-1}Xf\} \\ &= -dg(X)g^{-1}f + Xf, \end{aligned}$$

从而欲证的等式化为

$$-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\bar\omega_{ij}(X)e_ie_j = g^{-1}dg(X) - \frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}(X)g^{-1}e_ie_jg.$$

由于

$$\begin{aligned} (\bar E_1, \cdots, \bar E_{2l}) &= \rho_1\bar\sigma = \rho_1(\sigma\cdot g) = \rho_1(\sigma)\cdot\rho(g) \\ &= (E_1, \cdots, E_{2l})\cdot\rho(g), \end{aligned}$$

则由引理 1.2.4(iii) 有

$$\bar\omega = (\rho(g))^{-1}\cdot\omega\cdot\rho(g) + (\rho(g))^{-1}\cdot d\rho(g),$$

其中 $\bar\omega = (\bar\omega_{ij}),\quad \omega = (\omega_{ij}).$

于是 $\bar\omega_{ij}(X) = \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha i}\omega_{\alpha\beta}(X)g_{\beta j} + (\rho(g^{-1})X\rho(g))_{ij},$

或

$$-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\bar{\omega}_{ij}(X)e_ie_j=-\frac{1}{4}\sum_{i,j,\alpha,\beta}g_{\alpha i}\omega_{\alpha\beta}(X)g_{\beta j}e_ie_j$$
$$-\frac{1}{4}\sum_{i,j}(\rho(g^{-1})\cdot X\rho(g))_{ij}e_ie_j.$$

利用命题5.1.4(ii)的证明中的公式

$$g\cdot e_i\cdot g^{-1}=\sum_j(\rho(g))_{ji}e_j,$$

便得

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta}g_{\alpha i}\omega_{\alpha\beta}(X)g_{\beta j}e_ie_j$$
$$=\sum_{i,j,\alpha,\beta}(\rho(g^{-1}))_{i\alpha}e_i\cdot\omega_{\alpha\beta}(X)(\rho(g^{-1}))_{j\beta}e_j$$
$$=\sum_{\alpha,\beta}g^{-1}\cdot e_\alpha g\omega_{\alpha\beta}(X)g^{-1}e_\beta g$$
$$=\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha\beta}(X)g^{-1}e_\alpha e_\beta g.$$

因此欲证的等式化为

$$g^{-1}\cdot Xg=-\frac{1}{4}\sum_{i,j}(\rho(g^{-1})\cdot X\rho(g))_{ij}e_ie_j.$$

我们把这个等式的证明放在下面的引理7.2.3中，所以现在完成了引理7.2.2的证明.

引理7.2.3 设有映射

$$g: U\to\mathrm{Spin}(2l)$$

和一条道路 $\quad\gamma: [0, s)\to U,$

则

$$(g(\gamma(0)))^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g(\gamma(t))$$
$$=-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\left(\rho(g^{-1}(\gamma(0)))\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\rho g\gamma(t)\right)_{ij}e_ie_j.$$

证明 记 $x=\gamma(0)$. 令

$$\gamma_{ij}(t)=-e_i(\cos t\cdot e_i+\sin t\cdot e_j)=\cos t-\sin t\cdot e_ie_j,$$

它定义一个映射

$$\gamma_{ij}: [0, s)\to\mathrm{Spin}(2l).$$

考虑 $\mathrm{Spin}(2l)$ 上一条下列形式的道路:

$$\varphi: [0, s)\to\mathrm{Spin}(2l): t\mapsto g(x)\cdot\prod_{i<j}\gamma_{ij}(\lambda_{ij}t),$$

其中 λ_{ij} 是常数. 易见

$$\varphi(0)^{-1}\cdot\dot{\varphi}(0)=-\sum_{i<j}\lambda_{ij}e_ie_j\in T_1\mathrm{Spin}(2l).$$

由命题 5.1.4(iii) 可知: 线性无关的集合 $\{e_ie_j|i<j\}$ 必能张满 $T_1\mathrm{Spin}(2l)$. 从而存在适当的 λ_{ij}, 使得

$$(g(x))^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}g(r(t))=\varphi(0)^{-1}\cdot\dot{\varphi}(0)=-\sum_{i<j}\lambda_{ij}e_ie_j.$$

由此可知

$$(\rho g(x))^{-1}\cdot\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\rho g(r(t))=(\rho\varphi(0))^{-1}\cdot(\rho\varphi)'(0).$$

易知

$$\rho r_{ij}(\lambda_{ij}t)=\begin{pmatrix}1&&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&\cos(2\lambda_{ij}t)&&&\sin(2\lambda_{ij}t)&&\\&&&&1&&&&\\&&&&&\ddots&&&\\&&&&&&1&&\\&&&-\sin(2\lambda_{ij}t)&&&\cos(2\lambda_{ij}t)&&\\&&&&&&&1&\\&&&&&&&&\ddots\\&&&&&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \text{第 } i \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \text{第 } j \text{ 行}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

故
$$((\rho\varphi(0))^{-1}\cdot(\rho\varphi)'(0))_{ij}=\begin{cases}2\lambda_{ij}, & \text{当 } i<j;\\ -2\lambda_{ji}, & \text{当 } i>j;\\ 0, & \text{当 } i=j.\end{cases}$$

从而

$$-\frac{1}{4}\sum_{i,j}((\rho\varphi(0))^{-1}\cdot(\rho\varphi)'(0))_{ij}e_ie_j=-\sum_{i<j}\lambda_{ij}e_ie_j$$
$$=\varphi(0)^{-1}\cdot\dot{\varphi}(0).$$

于是引理得证.

注 7.2.4 上面我们证明了引理 7.2.2 中的 ∇ 确实是一个联络, 并没有验证它是通过定义 7.2.1 中的手续造出来的. 后一结论的验证请读者自己去完成. 关键之处在于认清 M 上的 Levi-Civita 联络矩阵

$$\omega\equiv(\omega_{ij})=\sum_{i<j}\omega_{ij}(\theta_{ij}-\theta_{ji})$$

与引理 7.2.2 中的

$$-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}\cdot(X)e_ie_j$$

之间的关系，其中 θ_{ij} 的定义见引理 3.3.2 中的说明，它是 $2l$ 阶方阵，其第 $(i,\ j)$ 元是 1，而其余元为零．利用由 ρ: $\mathrm{Spin}(2l)\to \mathrm{SO}(2l)$ 诱导出的映射

$$\rho_*:\ T_1\mathrm{Spin}(2l)\to T_1\ \mathrm{SO}(2l),$$

证明引理 7.2.3 时的计算表明

$$\rho_*\left(-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}e_ie_j\right)=\sum_{i<j}\omega_{ij}(\theta_{ij}-\theta_{ji}).$$

再进一步解释上式即可完成欲作的验证．

引理 7.2.5 设

$$L_{[r]}:\ \Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

是定义 7.2.1 中的算子，则在 Spin(M) 的局部截面 σ 下，

$$L_{[r]}(\sigma,\ f)=\left(\sigma,\ \sum_i e_iE_if-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k}\omega_{ij}(E_k)e_ke_ie_jf\right).$$

证明 由于

$$r=\sum_i\delta_i\otimes e_i\in\mathbf{R}^{2l}\otimes\mathrm{Hom}(S,\ S),$$

故它诱导的$[r]$在 σ 下表为

$$\begin{aligned}[r]&=(\sigma,\ \sum_i e_i\otimes\delta_i)\in\Gamma(\mathrm{Hom}(E,\ E)\otimes\mathrm{TM})\\&=\Gamma(\mathrm{Hom}(E,\ E))\otimes\Gamma(\mathrm{TM}).\end{aligned}$$

容易知道 $(\sigma,\ \delta_i)=(\rho(\sigma),\ \delta_i)=E_i\in\Gamma(\mathrm{TM})$,

并且对于$(\sigma,\ f)\in\Gamma(E)$,

$$(\sigma,\ e_i)((\sigma,\ f))=(\sigma,\ e_if)\in\Gamma(E).$$

于是按第 1 章 §1.5 中的定义，有

$$\begin{aligned}L_{[r]}(\sigma,\ f)&=\sum_i(\sigma,\ e_i)\nabla_{(\sigma,\delta_i)}(\sigma,\ f)\\&=\sum_i(\sigma,\ e_i)\left(\sigma,\ E_if-\frac{1}{4}\sum_{j,k}\omega_{jk}(E_i)e_je_kf\right)\\&=\sum_i\left(\sigma,\ e_iE_if-\frac{1}{4}\sum_{j,k}\omega_{jk}(E_i)e_ie_je_kf\right).\end{aligned}$$

引理得证.

定理 7.2.6(Weitzenböck 公式) 设

$$D: \Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

是引理 7.2.5 中的算子 $L_{[\sigma]}$ (有时我们也把它称为 Dirac 算子), 则

$$D^2=-\Delta_0+\frac{1}{4}R: \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

其中 R 是 M 的标量曲率, 它是 M 上的一个函数, 如用第 1 章 §1.2 中的记号, 则

$$R=\sum_{i,j}R_{ijij}.$$

证明 首先我们对引理 7.2.5 的证明中出现的 (σ, e_i) 作点解释. 它和定理 1.6.13 的证明中的 $(\omega_i\wedge)$ 和 $i(E_j)$ 极为类似. 经过关于配联络的讨论可知

$$\nabla_{E_i}(\sigma, e_j)=\sum_k\Gamma_{ij}^k(\sigma, e_k)-\sum_k\omega_{kj}(E_i)(\sigma, e_j).$$

在下面的计算中我们用定义 1.5.4 的记号 $D(X, Y)$ (不要与 Dirac 算子的记号 D 混淆). 于是有

$$\begin{aligned}
D^2&=\sum_{i,j}(\sigma, e_i)\nabla_{E_i}(\sigma, e_j)\nabla_{E_j}\\
&=\sum_{i,j}(\sigma, e_i)[\nabla_{E_i}(\sigma, e_j)]\nabla_{E_j}+\sum_{i,j}(\sigma, e_i)(\sigma, e_j)\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\\
&=\sum_{i,j,k}(\sigma, e_i)(\sigma, e_k)\Gamma_{ij}^k\nabla_{E_j}+\sum_{i,j}(\sigma, e_ie_j)\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}\\
&=\sum_{i,j}(\sigma, e_ie_j)D(E_i, E_j)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\{(\sigma, e_ie_j)D(E_i, E_j)+(\sigma, e_je_i)D(E_j, E_i)\}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}\{(\sigma, e_ie_j)D(E_i, E_j)\\
&\quad-(\sigma, e_ie_j)D(E_j, E_i)-2\delta_{ij}D(E_j, E_i)\}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma, e_ie_j)R(E_i, E_j)-\Delta_0.
\end{aligned}$$

上面的曲率算子 $R(E_i, E_j)$ 应是

$$R(E_i, E_j): \Gamma(E)\to\Gamma(E).$$

它和流形 M 上的曲率算子

$$R(E_i,\ E_j):\ \Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$$

是不同的，故需重新讨论．我们先证明下列等式：

$$R(X,\ Y)=-\frac{1}{4}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}\omega_i(X)\omega_j(Y)\times(\sigma,\ e_k)(\sigma,\ e_l):\ \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

其中 $\{\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{2l}\}$ 是 $\{E_1,\ \cdots,\ E_{2l}\}$ 的对偶标架场．值得注意的是：上述等式两端与局部截面 σ 的选取无关．这件事证明如下：若 $\bar{\sigma}:\ U\to\mathrm{Spin}(M)$ 是另一截面，那么有 $g:\ U\to\mathrm{Spin}(2l)$ 使得 $\bar{\sigma}=\sigma\cdot g$．于是

$$(\bar{E}_1,\ \cdots,\ \bar{E}_{2l})=(E_1,\ \cdots,\ E_{2l})\cdot\rho(g),$$
$$(\bar{\omega}_1,\ \cdots,\ \bar{\omega}_{2l})=(\omega_1,\ \cdots,\ \omega_{2l})\cdot\rho(g).$$

并且还有

$$((\bar{\sigma},\ e_1),\ \cdots,\ (\bar{\sigma},\ e_{2l}))=((\sigma,\ e_1),\ \cdots,\ (\sigma,\ e_{2l}))\cdot\rho(g).$$

由此即知欲证等式的右端与 σ 的选取无关．为了证明欲证的等式在 p 点成立，采用证明引理 1.6.6 的第二等式的方法，选取特殊的 σ，使得在对应的幺正标架场 $\{E_1,\cdots,E_{2l}\}$ 下 $\Gamma_{ij}^k(p)=0$ 或 $\omega_{ij}|_p=0$（这样的 σ 是存在的）．对于 $(\sigma,\ f)\in\Gamma(E)$，有

$$\nabla_{E_i}(\sigma,\ f)=(\sigma,\ E_if)-\frac{1}{4}(\sigma,\ \sum_{\alpha,\beta}\Gamma_{i\beta}^{\alpha}e_\alpha e_\beta f)$$
$$=(\sigma,\ E_if)-\frac{1}{4}\sum_{\beta}[\nabla_{E_i}(\sigma,\ e_\beta)]\cdot(\sigma,\ e_\beta)\cdot(\sigma,\ f).$$

于是

$$\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}(\sigma,\ f)|_p=(\sigma,\ E_iE_jf)|_p-\frac{1}{4}\sum_{\beta}[\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}(\sigma,e_\beta)]\cdot(\sigma,\ e_\beta)\cdot(\sigma,\ f)\Big|_p,$$

从而

$$R(E_i,\ E_j)(\sigma,\ f)|_p=-\frac{1}{4}\sum_{\beta}[(\nabla_{E_i}\nabla_{E_j}-\nabla_{E_j}\nabla_{E_i}-\nabla_{[E_i,E_j]})(\sigma,\ e_\beta)]\times(\sigma,\ e_\beta)\cdot(\sigma,\ f)|_p.$$

注意到　$\nabla_{E_i}E_j=\sum_k \Gamma_{ij}^k E_k$,　$\nabla_{E_i}(\sigma, e_j)=\sum_k \Gamma_{ij}^k(\sigma, e_k)$,

以及　$$R(E_i, E_j)E_k=-\sum_l R_{ijkl}E_l,$$

故知　$$R(E_i, E_j)(\sigma, e_k)=-\sum_l R_{ijkl}(\sigma, e_l).$$

这样便有

$$R(E_i, E_j)(\sigma, f)\big|_p=-\frac{1}{4}\sum_{k,l} R_{ijkl}\cdot(\sigma, e_k)\cdot(\sigma, e_l)\cdot(\sigma, f)\Big|_p.$$

故欲证的等式成立. 由 Bianchi 恒等式

$$R_{i\alpha\beta\gamma}+R_{i\gamma\alpha\beta}+R_{i\beta\gamma\alpha}=0$$

(见命题 1.2.1 和 1.2.2)得下列计算:

$$\begin{aligned}0&=\sum_{i,\alpha,\beta,\gamma}(R_{i\alpha\beta\gamma}+R_{i\gamma\alpha\beta}+R_{i\beta\gamma\alpha})e_ie_\alpha e_\beta e_\gamma\\&=\sum_{i,\alpha,\beta,\gamma}R_{i\alpha\beta\gamma}(e_ie_\alpha e_\beta e_\gamma+e_ie_\beta e_\gamma e_\alpha+e_ie_\gamma e_\alpha e_\beta)\\&=3\sum_{i,\alpha,\beta,\gamma}R_{i\alpha\beta\gamma}e_ie_\alpha e_\beta e_\gamma+2\sum_{i,\alpha,\beta}(R_{\alpha ii\beta}-2R_{\alpha i\beta i}+R_{\alpha\beta ii})e_\alpha e_\beta\\&=3\sum_{i,\alpha,\beta,\gamma}R_{i\alpha\beta\gamma}e_ie_\alpha e_\beta e_\gamma+6\sum_{i,\alpha}R_{i\alpha i\alpha},\end{aligned}$$

从而　$$\sum_{i,\alpha,\beta,\gamma}R_{i\alpha\beta\gamma}e_ie_\alpha e_\beta e_\gamma=-2\sum_{i,\alpha}R_{i\alpha i\alpha}=-2R.$$

于是

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma, e_ie_j)R(E_i, E_j)&=-\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l}R_{ijkl}(\sigma, e_ie_je_ke_l)\\&=\frac{1}{4}(\sigma, R)=\frac{1}{4}R.\end{aligned}$$

定理证毕.

在 $S=S^++S^-$ 中可以取自然的 Hermite 内积, 使得 $C_{2l}(-1)$ 在 S^++S^- 上的作用保持内积. 于是从 S^+ 和 S^- 中的内积可以导出 E_+ 和 E_- 中的内积⟨,⟩, 进而给出 $\Gamma(E_+)$、$\Gamma(E_-)$ 中的内积⟨,⟩.

命题 7.2.7　令 D_+: $\Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$ 和 D_-: $\Gamma(E_-)\to\Gamma(E_+)$ 是 Dirac 算子 $D:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 的限制, 则 $D_+:\Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$ 的伴随算子是 $D_-:\Gamma(E_-)\to\Gamma(E_+)$.

证明　设 $\theta=(\sigma, f)\in\Gamma(E_+)$, $\zeta=(\sigma, g)\in\Gamma(E_-)$. 若记

$\tilde{e}_i=(\sigma, e_i)$，则

$$\begin{aligned}\langle D\theta, \zeta\rangle &=\sum_i\langle\tilde{e}_i\nabla_{E_i}\theta, \zeta\rangle \\ &=\sum_i\{\langle\nabla_{E_i}(\tilde{e}_i\theta), \zeta\rangle-\langle(\nabla_{E_i}\tilde{e}_i)\theta, \zeta\rangle\} \\ &=\sum_i\{E_i\langle\tilde{e}_i\theta, \zeta\rangle-\langle e_i\theta, \nabla_{E_i}\zeta\rangle-\sum_j\Gamma^j_{ii}\langle\tilde{e}_j\theta, \zeta\rangle\} \\ &=\sum_i\langle\theta, e_i\nabla_{E_i}\zeta\rangle+\sum_i\{E_i\langle e_i f, g\rangle \\ &\quad-\sum_j\Gamma^j_{ii}\langle e_j f, g\rangle\}.\end{aligned}$$

容易验证

（i） $T=\sum_i\langle e_i f, g\rangle E_i$ 是 M 上的向量场；

（ii） $\operatorname{div} T=\sum_i\langle\nabla_{E_i}T, E_i\rangle=\sum_i\{E_i\langle e_i f, g\rangle-\sum_j\Gamma^j_{ii}\langle e_j f, g\rangle\}$

（参见习题1.6.7）.

因此 $$\langle D\theta, \zeta\rangle=\langle\theta, D\zeta\rangle+\operatorname{div} T,$$

从而 $$\langle\langle D\theta, \zeta\rangle\rangle=\langle\langle\theta, D\zeta\rangle\rangle.$$

命题得证.

与 de Rham-Hodge 算子和 Signature 算子的情形类似，由于命题 7.2.7, Dirac 算子

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

的局部指标定义如下：考虑

$$\Delta\equiv D^2: \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

令 $$H(t, y, \xi)=\frac{e^{-\frac{\rho^2}{4t}}}{(\sqrt{4\pi t})^{2l}}\sum_{i=0}^{\infty}t^i U^{(i)}(\xi, y): E|_\xi\to E|_y$$

是 $\frac{\partial}{\partial t}+\Delta$ 的 MP 拟基本解. 则定义

$$(\operatorname{loc.ind}(D_+))(\xi)=\frac{1}{(\sqrt{4\pi})^{2l}}\widehat{\operatorname{tr}}\, U^{(l)}(\xi, \xi).$$

为了论证 Dirac 算子 D_+ 的局部指标定理，根据命题 5.3.1，需要定义合适的 χ.

定义 7.2.8 设有表达式

$$\alpha=\varphi_{\alpha_1}(y)\frac{\partial}{\partial y_{\beta_1}}\varphi_{\alpha_2}(y)\cdots\frac{\partial}{\partial y_{\beta_m}}\varphi_{\alpha_{m+1}}(y)\tilde{e}_{j_1}\cdots\tilde{e}_{j_s},$$

令
$$\chi(\alpha)=m-\nu(\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m+1}})+s,$$
其中
$$\tilde{e}_j=(\sigma,\ e_j)\in\Gamma(\mathrm{Hom}(E,\ E)),$$
σ 是主丛 $\mathrm{Spin}(M)$ 的一个固定的局部截面(注意：表达式与 σ 的取法有关).

根据定义 7.2.8, 可以定义
$$\chi(\omega)<N \quad 与 \quad \omega_1=\omega_2+(\chi<N)$$
等概念. 由命题 5.3.1 可推得如下引理:

引理 7.2.9 设 $\xi\in M$, M_ξ 为 ξ 点的一个小邻域, 又设映射
$$\omega: M_\xi\to\mathrm{Hom}(S^+ + S^-,\ S^+ + S^-)$$
满足
$$\chi(\omega)<2l,$$
则
$$\widehat{\mathrm{tr}}\,\omega(\xi)=0.$$

命题 7.2.10 设 $D: \Gamma(E)\to\Gamma(E)$ 是 Dirac 算子, 则
$$D^2=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}\tilde{e}_\alpha\tilde{e}_\beta$$
$$+\frac{1}{64}\sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}y_iy_jR_{ik\alpha_1\alpha_2}(\xi)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(\xi)\tilde{e}_{\alpha_1}\tilde{e}_{\alpha_2}\tilde{e}_{\alpha_3}\tilde{e}_{\alpha_4}$$
$$+(\chi<2),$$
其中 $(y_1,\ \cdots,\ y_{2l})$ 是以 ξ 为中心的法坐标系; 选定的 σ 使得 $\rho_1(\sigma)=(E_1,\cdots,E_{2l})$是沿着过 ξ 的测地线平行的幺正标架场, 并且
$$E_i(\xi)=\frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_\xi;$$
$$\tilde{e}_\alpha=(\sigma,\ e_\alpha).$$
等式中的 $\frac{\partial}{\partial y_i}$ 实际是第 1 章 §1.6 末尾的$\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)^\sigma$. 仿照 $\tilde{e}_\alpha$ 的记法, 它可记为$\left(\sigma,\ \frac{\partial}{\partial y_i}\right)$.

证明 由定理 7.2.6(Weitzenböck 公式)知
$$D^2=-\Delta_0+(\chi<2).$$
按照第 1 章 §1.7 的定义, 有

$$H_{ikl}=\omega_{kl}\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right)=\omega_{kl}\left(\sum_s H_{si}E_s\right)$$
$$=\sum_s H_{si}\omega_{kl}(E_s)=\sum_s H_{si}\Gamma^k_{sl}.$$

再由习题1.7.10，得

$$\Gamma^k_{ij}=\frac{1}{2}\sum_s R_{isjk}(\xi)y_s+\cdots.$$

于是

$$\Delta_0=\sum_i(\nabla_{E_i}\nabla_{E_i}-\nabla_{\nabla_{E_i}E_i})$$
$$=\sum_i\nabla_{E_i}\left(\sigma,\ E_i-\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\omega_{\alpha\beta}(E_i)e_\alpha e_\beta\right)-\sum_i\Gamma^k_{ii}\nabla_{E_k}$$
$$=\sum_i\nabla_{E_i}\left(\sigma,\ E_i+\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^\beta_{i\alpha}e_\alpha e_\beta\right)+(\chi<2)$$
$$=\sum_i\left(\sigma,\ E_iE_i+\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}E_i\Gamma^\beta_{i\alpha}e_\alpha e_\beta+\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^\beta_{i\alpha}e_\alpha e_\beta E_i\right.$$
$$\left.+\frac{1}{16}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}\Gamma^{\alpha_2}_{i\alpha_1}\Gamma^{\alpha_4}_{i\alpha_3}e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}\right)+(\chi<2).$$

由于

$$E_iE_i=\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{\partial}{\partial y_i}+(\chi<2);$$

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}E_i\Gamma^\beta_{i\alpha}e_\alpha e_\beta=-\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,j}R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta+(\chi<2);$$

$$\frac{1}{4}\sum_{\alpha,\beta}\Gamma^\beta_{i\alpha}e_\alpha e_\beta E_i=-\frac{1}{8}\sum_{\alpha,\beta,j}R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta+(\chi<2);$$

$$\frac{1}{16}\sum_{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}\Gamma^{\alpha_2}_{i\alpha_1}\Gamma^{\alpha_4}_{i\alpha_3}e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}$$
$$=\frac{1}{64}\sum_{\substack{j,k\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}R_{ij\alpha_1\alpha_2}(\xi)R_{ik\alpha_3\alpha_4}y_jy_ke_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}+(\chi<2).$$

故知命题成立.

Dirac 算子 $D_+:\Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$的局部指标定义中用到的 $U^{(i)}(\xi,\ y)$满足引理 4.1.1 的方程，即对于 $v\in E|_\xi$，令 $\mathscr{U}^{(i)}(y)=U^{(i)}(\xi,\ y)v$，则有下式成立：

$$\begin{cases}\left(\nabla\hat{d}+i+\frac{\hat{\partial}G}{4G}\right)\mathscr{U}^{(i)}(y)=-D^2\mathscr{U}^{(i-1)}(y);\\ \mathscr{U}^{(-1)}(y)\equiv 0;\\ \mathscr{U}^{(0)}(0)=v.\end{cases}$$

根据命题7.2.10中的表达式，令

$$a_s=\begin{cases}\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}, & \text{当 } s=2;\\ -\frac{1}{4}\sum R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta, & \text{当 } s=0;\\ -\frac{1}{64}\sum y_iy_jR_{ik\alpha_1\alpha_2}(\xi)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(\xi)e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}, & \text{当 } s=-2;\\ 0, & \text{其余情形}.\end{cases}$$

为了记号简单计，把 $(\sigma,\ a_s)$ 也记为 a_s. 在第6章§6.2中用的 a_s 与 b_s 等相当于现在的 $(\sigma,\ a_s)$. 请读者注意：不要从概念上混淆了现在定义的 $(\sigma,\ a_s)$ 与 a_s. 但是在作计算时，我们总是固定一个 σ，所以能以 a_s 取代 $(\sigma,\ a_s)$，使书写简单些，仿照引理6.2.6的证明，可得以下引理：

引理7.2.11　对于任意的 $v\in E_\xi\equiv E|_\xi$，由等式

$$U^{(i)}(\xi,\ y)v=/\!/_\xi^y U^{(i)}(y)v$$

确定映射(定义在 ξ 的一个邻域 M_ξ 上)：

$$U^{(i)}: M_\xi\to\mathrm{Hom}(E_\xi,\ E_\xi)\equiv\mathrm{Hom}(S,\ S),$$

则

$$U^{(i)}(\hat{m})=\sum_{s_1,\cdots,s_i}\frac{a_{s_1}\cdots a_{s_i}}{\Gamma(s_1,\ \cdots,\ s_i;\ m)}1(\widehat{m+s_1+\cdots+s_i})+(\chi<2i),$$

其中 $1(\hat{m})$ 是常值函数1的 m 次泰勒展开项. 换言之，如果映射

$$V^{(i)}: M_\xi\to\mathrm{Hom}(S,\ S)$$

满足

$$\begin{cases}(\hat{d}+i)V^{(i)}(y)=(a_2+a_0+a_{-2})V^{(i-1)}(y);\\ V^{(-1)}(y)\equiv 0;\\ V^{(0)}(0)=1: S\to S.\end{cases}$$

则
$$U^{(i)}(\hat{m})=V^{(i)}(\hat{m})+(\chi<2i).$$

证明　完全仿照引理6.2.6的证明可得：

$$U^{(i)}(\hat{m})=\sum_{s_1,\cdots,s_i}\frac{a_{s_1}\cdots a_{s_i}}{\Gamma(s_1,\ \cdots,\ s_i;\ m)}U^{(0)}(\widehat{m+s_1+\cdots+s_i})$$
$$+(\chi<2i).$$

注意到

$$U^{(0)}(\widehat{m+s_1+\cdots+s_i})=1(\widehat{m+s_1+\cdots+s_i})+(\chi<0),$$

所以引理中关于 $U^{(i)}(\hat{m})$ 的等式成立. 如果用考虑 $U^{(i)}$ 的方法来考虑 $V^{(i)}$, 再比较 $U^{(i)}(\hat{m})$ 与 $V^{(i)}(\hat{m})$ 的等式, 便知

$$U^{(i)}(\hat{m})=V^{(i)}(\hat{m})+(\chi<2i).$$

引理证毕.

引理 7.2.12　如果映射 $W^{(i)}: M_l\to \mathrm{Hom}(S,\ S)$ 满足

$$\begin{cases}(\hat{d}+i)W^{(i)}(y)=(a_2+a_{-2})W^{(i-1)}(y);\\ W^{(-1)}(y)\equiv 0;\\ W^{(0)}(0)=1:S\to S.\end{cases}$$

则
$$W^{(i)}(\hat{m})=V^{(i)}(\hat{m})+(\chi<2i),$$

其中 $V^{(i)}(\hat{m})$ 的定义见引理 7.2.11.

证明　仿照命题 6.2.7 的证明, 即可证出本引理.

到现在为止, 我们再利用命题 5.3.1(或引理 7.2.9), 便得

$$\begin{aligned}(\mathrm{loc.ind}(D_+))(\xi)&=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}U^{(l)}(\xi,\ \xi)\\ &=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}U^{(l)}(0)=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}V^{(l)}(0)\\ &=\frac{1}{(4\pi)^l}\widehat{\mathrm{tr}}W^{(l)}(0).\end{aligned}$$

如果再仿照对命题 6.2.8、命题 6.2.10、引理 6.2.11 和定理 6.2.12 的讨论, 就可以得到 Dirac 算子 D_+ 的局部指标定理了. 现在的讨论比 Signature 算子情形的讨论容易, 至少不需要用引理 6.2.9. 可是仿照第 6 章 § 6.2 的讨论是相当乏味的, 因此在此就不再继续下去了. 下面我们用陈根算法来处理 Dirac 算子. 一方面用以给出局部指标定理的结论, 另一方面对陈根算法作一次复习. 首先我们知道

$$\text{loc.ind}(D_+) = \lim_{t\to 0}\widehat{\text{tr}}\, G(t,\ \xi,\ \xi),$$

其中 $G(t, y, \xi)$ 满足

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial t}+\varDelta\right)G(t,\ y,\ \xi)=0;\\ \lim\limits_{t\to 0}\displaystyle\int_M G(t,\ y,\ \xi)\varphi(\xi)d\xi=\varphi(y),\ \forall\varphi.\end{cases}$$

这里的 $\varDelta$ 是 Dirac 算子 D 的平方. 由引理 7.2.12, 有

$$\varDelta = D^2 = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$$
$$+\frac{1}{64}\sum y_i y_j R_{ik\alpha_1\alpha_2}(\xi)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(\xi)e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}+\cdots.$$

上式中的 $\dfrac{\partial}{\partial y_i}$ 和 e_α 实际上是 $\left(\sigma,\ \dfrac{\partial}{\partial y_i}\right)$ 和 $(\sigma,\ e_\alpha)$.

第 6 章 § 6.1 中陈根算法的最基本公式是:

$$\begin{cases}\Omega_{ij}=\sum\limits_{s=1}^{l}2\pi u_s(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1});\\ x_s=\sum\limits_{\alpha,\beta}\pi u_s(E_\alpha,\ E_\beta)e_\alpha e_\beta,\end{cases}$$

以及导出公式:

$$\begin{cases}A_{ij}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(\xi)e_\alpha e_\beta;\\ A_{ij}=\sum\limits_{s=1}^{l}x_s(\delta_{i,2s-1}\delta_{j,2s}-\delta_{i,2s}\delta_{j,2s-1}).\end{cases}$$

将上述公式代入算子 $\varDelta$ 和 $\dfrac{\partial}{\partial t}+\varDelta$ 的表达式, 得

$$\begin{aligned}\varDelta&=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{16}\sum_{i,j,k}y_iy_jA_{ik}A_{kj}\\&=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}+\varDelta=\frac{\partial}{\partial t}-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2).$$

由引理 4.5.1, 此时 $\dfrac{\partial}{\partial t}+\varDelta$ 的基本解是:

$$G(t,y)=\prod_{s=1}^{l}\left[\frac{\sqrt{-1}x_s}{8\pi\cdot\mathrm{sh}\frac{\sqrt{-1}x_s t}{2}}\right.$$
$$\left.\times\exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{8}x_s\cdot\coth\frac{\sqrt{-1}x_s t}{2}\cdot(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)\right)\right]$$

于是

$$\lim_{t\to0}\widehat{\mathrm{tr}}\,G(t,0)$$
$$=\lim_{t\to0}\widehat{\mathrm{tr}}\left[\frac{1}{(4\pi t)^l}\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}x_s t}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\sqrt{-1}x_s t}{2}}\right)\right]$$
$$=\widehat{\mathrm{tr}}\left[\frac{1}{(4\pi)^l}\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}\right)\right](\hat{l}),$$

式中 $\hat{l}$ 表示关于变元 $x_1,\cdots,x_l$ 的泰勒展开式中取 l 次项. 利用命题 5.3.1, 有下列计算:

$$\widehat{\mathrm{tr}}\left[\frac{1}{(4\pi)^l}\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}{\mathrm{sh}\frac{\sqrt{-1}x_s}{2}}\right)\right](\hat{l})$$
$$=\widehat{\mathrm{tr}}\left[\frac{1}{(4\pi)^l}\prod_{s=1}^{l}\left(\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\pi u_s(E_\alpha,E_\beta)e_\alpha e_\beta}{\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\pi u_s(E_\alpha,E_\beta)e_\alpha e_\beta\right)}\right)\right](\hat{l})$$
$$=\frac{2^l}{(\sqrt{-1})^l}\cdot\frac{1}{(4\pi)^l}$$
$$\times\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\pi u_s(E_\alpha,E_\beta)\omega_\alpha\wedge\omega_\beta}{\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}\sum\pi u_s(E_\alpha,E_\beta)\omega_\alpha\wedge\omega_\beta\right)}\right)(E_1,\cdots,E_{2l})$$
$$=\frac{2^l}{(\sqrt{-1})^l}\cdot\frac{1}{(4\pi)^l}\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{\sqrt{-1}}{2}\cdot2\pi u_s}{\mathrm{sh}\left(\frac{\sqrt{-1}}{2}2\pi u_s\right)}\right)(E_1,\cdots,E_{2l})$$

$$=\frac{2^l}{(\sqrt{-1})^l}\cdot\frac{1}{(4\pi)^l}(\sqrt{-1}\cdot 2\pi)^l\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{u_s}{2}}{\operatorname{sh}\frac{u_s}{2}}\right)(E_1, \cdots, E_{2l})$$

$$=\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{u_s}{2}}{\operatorname{sh}\frac{u_s}{2}}\right)(E_1, \cdots, E_{2l}).$$

照通常 $\hat{A}$ 示性式的定义

$$\hat{A}(p_1, p_2, \cdots)=\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{u_s}{2}}{\operatorname{sh}\frac{u_s}{2}},$$

从而有如下定理:

定理 7.2.13(Dirac 算子的局部指标定理) 设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形, 有一个固定的 Spin$(2l)$ 结构, 又设

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

是定义 7.2.1 中所定义的 Dirac 算子, 则

$$\operatorname{loc.ind}(D_+)=\hat{A}(p_1, p_2, \cdots)(E_1, \cdots, E_{2l}).$$

第8章

Atiyah–Singer 算子

Atiyah、Singer 对物理学中 Dirac 算子作了推广，得到第 7 章 § 7.2 中的 Dirac算子. 他们作的推广讨论显然可以导出本章的 Atiyah-Singer 算子. 这种算子包含过去讨论过的 de Rham-Hodge 算子、Signature 算子、Atiyah-Singer-Dirac 算子，也包含了即将介绍的上述算子的扭化(twisted)算子. 在人们的心目中，这种算子应称为广义的 Dirac 算子. 但是眼下流行的广义的 Dirac 算子已有确切的涵义，它们是下面的扭化 Dirac 算子(见定义 8.3.13)或是定义 8.3.15 中的增广 Dirac 算子. 由于这些流行的广义的 Dirac 算子不够全面，所以我们把这一章讨论的算子称为 Atiyah-Singer 算子.

Atiyah、Singer 的作法使我们认识到前面讨论过的算子有一个共同的表达方式，即都能写成

$$D=\sum_i \tilde{e}_i \nabla_{E_i}: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-),$$

其中 $\{\tilde{e}_i\}$ 构成一个 Clifford 代数. 因为 D 有 Weitzenböck 公式

$$D^2=-\Delta_0+\cdots,$$

其中 Δ_0 是 Laplace-Beltrami 算子，故我们可把 D 视为 Laplace-Beltrami 算子的平方根.

由 $\{\tilde{e}_i\}$ 构成的 Clifford 代数是怎样作用在 $\Gamma(E_+ + E_-)$ 上的呢?定义 D 时何以能保证不与标架场 $\{E_1, \cdots, E_n\}$ 的选取有关呢? 这两个问题本质上讲是代数的. § 8.1 中论述的 G-Clifford 模正是用于解决这两个问题的. 在 § 8.2 将介绍向量丛 $E=E_+\oplus E_-$ 上的联络. 在 § 8.3 中要介绍超结构，以便从算子

$$D:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

经限制而得到 Atiyah-Singer 算子

$$D_+:\Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-).$$

此外还把一些熟知的算子理解为 Atiyah-Singer 算子的特例. 在 § 8.4 中将粗浅地谈一下某些 Atiyah-Singer 算子的局部指标定理. 一般的情形就不在本书中细述了.

§ 8.1 G-Clifford 模

在第 5 章习题 5.1.12 之后有一个关于 Clifford 代数的小结, 在那里我们指出 $S(2n)$是一个 Spin$(2n)$-Clifford 模, 现在把这一概念作一小小的推广.

设 V 是一个复向量空间, G 是一个群. 映射

$$\xi: G\times V\to V$$

如满足:

(i) 对于 g_1、$g_2\in G$; $v\in V$, 有

$$\xi(g_1\cdot g_2,\ v)=\xi(g_1,\ \xi(g_2,\ v));$$

(ii) 对于 $g\in G$; v_1、$v_2\in V$; $a,\ b\in\mathbf{C}$, 有

$$\xi(g,\ av_1+bv_2)=a\xi(g,\ v_1)+b\xi(g,\ v_2).$$

则称为是群 G 在复向量空间 V 上的一个作用, 简称 G 在 V 上的作用. 又设 $C_n(-1)$是 Clifford 代数(实的), 映射

$$\eta: C_n(-1)\times V\to V$$

如满足:

(i) 对于 c_1、$c_2\in C_n(-1)$; $v\in V$; $\lambda\in\mathbf{R}$, 有

$$\eta(\lambda c_1+c_2,\ v)=\lambda\eta(c_1,\ v)+\eta(c_2,\ v),$$

$$\eta(c_1\cdot c_2,\ v)=\eta(c_1,\ \eta(c_2,\ v));$$

(ii) 对于 $c\in C_n(-1)$; v_1、$v_2\in V$; $a,\ b\in\mathbf{C}$, 有

$$\eta(c,\ av_1+bv_2)=a\eta(c,\ v_1)+b\eta(c,\ v_2).$$

则称为是 Clifford 代数 $C_n(-1)$在复向量空间 V 上的一个作用, 简称 $C_n(-1)$在 V 上的作用. 映射

$$\zeta: G\times C_n(-1)\to C_n(-1)$$

如满足:

(i) 对于 g_1、$g_2\in G$; $c\in C_n(-1)$, 有

$$\zeta(g_1\cdot g_2,\ c)=\zeta(g_1,\ \zeta(g_2,\ c));$$

(ii) 对于 $g\in G$; $c_1,\ c_2\in C_n(-1)$; $\lambda\in\mathbf{R}$, 有

$$\zeta(g,\ \lambda c_1+c_2)=\lambda\zeta(g,\ c_1)+\zeta(g,\ c_2),$$

$$\zeta(g,\ c_1\cdot c_2)=\zeta(g,\ c_1)\cdot\zeta(g,\ c_2).$$

(iii) 作用 ζ 可以限制在 $\mathbf{R}^n$ 上, 其中 $\mathbf{R}^n$ 是 $C_n(-1)$ 的子空间, 由 $\{e_1,\ \cdots,\ e_n\}$ 张成(参见定义 5.1.3).

则称为是群 G 在 Clifford 代数 $C_n(-1)$ 上的一个作用, 简称 G 在 $C_n(-1)$ 上的作用.

定义 8.1.1 设 V 是一个复向量空间, 其上具有一个群 G 作用 ξ 和一个 Clifford 代数 $C_n(-1)$ 作用 η, 如果又有一个 G 在 $C_n(-1)$ 上的作用

$$\zeta: G\times C_n(-1)\to C_n(-1),$$

使得对于 $g\in G$, $c\in C_n(-1)$, $v\in V$, 有

$$\xi(g,\ \eta(c,\ v))=\eta(\zeta(g,\ c),\ \xi(g,\ v)).$$

则称 V 是一个 n 阶 G-Clifford 模. 有时为准确计, 我们把这个 G-Clifford 模记为 $(G,\ C_n(-1),\ V;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$.

注 8.1.2 定义 8.1.1 显然是 Spin$(2n)$-Clifford 模 $S(2n)$ 的自然推广, 虽然过去并没有把"ζ 能限制在 $\mathbf{R}^n$"这一条件明白讲出来.

例 8.1.3 令 $G=\mathrm{Spin}(2n)$, 则 $S(2n)$ 是一个 G-Clifford 模. 有时称为 Spin$(2n)$-Clifford 模, 或旋量空间, 或预 Dirac模.

例 8.1.4 预 de Rham-Hodge 模

n 阶预 de Rham-Hodge 模是一个 n 阶 G-Clifford 模, 其中

$$G=O(n)=\{A\in GL(n,\ \mathbf{R})\mid A^t=A^{-1}\},$$

$$V=\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n).$$

关于 $\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)$, 请参见引理 5.1.5 前的定义. 定义 ξ、η、ζ 使之满足

$$\xi: O(n)\times\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)\to\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n): (A, \theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_s})$$
$$\mapsto\sum_{j_1,\cdots,j_s=1}^{n}A_{j_1i_1}\cdots A_{j_si_s}\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_s},$$
$$\eta: C_n(-1)\times\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)\to\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n): (e_i, \theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_s})$$
$$\mapsto(\varepsilon_i-l_i)(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_s}),$$
$$\zeta: O(n)\times C_n(-1)\to C_n(-1): (A, e_i)\mapsto\sum_j A_{ji}e_i.$$

现在验证上面定义的一个 G-Clifford 模. 验证分下列四个方面:

(i) ξ 是群 $O(n)$ 在向量空间 $\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)$ 上的作用.

(ii) η 是 Clifford 代数 $C_n(-1)$ 在向量空间 $\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)$ 上的作用.

(iii) ζ 是群 $O(n)$ 在 Clifford 代数 $C_n(-1)$ 上的作用.

(iv) 证明等式

$$\xi(g, \eta(c, v))=\eta(\zeta(g, c), \xi(g, v)).$$

在验证(i)之前, 我们需对定义 ξ 时的记号作点解释. 在第 5 章 § 5.1 中定义 $\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_s}$ 时, 曾要求 $i_1<\cdots<i_s$. 对于一般的 $i_1, \cdots, i_s$, $\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_s}$ 在那时没有提, 实际上它应理解为 $\theta_{i_1}, \cdots, \theta_{i_s}$ 的外积. 这种理解在定义 ξ 与 η 时是需要的, 或者确切地讲, 是方便的. 如何在 $\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)$ 中引入外积呢? 我们的作法是先定义一个代数 $\mathfrak{A}[\theta_1, \cdots, \theta_n]$, 而后把 $\mathfrak{A}[\theta_1, \cdots, \theta_n]$ 看成向量空间, 找出它与 $\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n)$ 的一个自然同构, 最后将 $\mathfrak{A}[\theta_1, \cdots, \theta_n]$ 中的乘法带给 $\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n)$. 令 $\mathfrak{A}[\theta_1, \cdots, \theta_n]$ 是一个 $\mathbf{R}$ 上的结合代数, 它具有单位元 1, 以 $\theta_1, \cdots, \theta_n$ 为生成元, 并且仅仅满足下列关系:

$$\theta_i\theta_j+\theta_j\theta_i=0, \ \forall i, j=1, \cdots, n.$$

易见, 作为实向量空间, $\mathfrak{A}[\theta_1, \cdots, \theta_n]$ 具有由下列单项式构成的基

$$\{\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}\mid 1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n, \ 0\leqslant k\leqslant n\},$$

其中当 $k=0$ 时, $\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}=1$. 由此可见, 将 $\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k}$ 对应于 $\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}$ 给出了一个向量空间的同构:

$$\mathfrak{A}[\theta_1, \cdots, \theta_n]\xrightarrow{\simeq}\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n).$$

于是在 $\Lambda^*_{\mathbf{R}}(n)$ 中便有乘法(现在称为外积)了. 经复化手续, $\Lambda^*_{\mathbf{C}}(n)$

中便有外积. 易见当 $i_1<\cdots<i_k$ 时, 记号 $\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}$ 中的"$\wedge$"可以理解为外积. 现在验证(i): 若 A、$B\in O(n)$;

$$\theta=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\lambda_{i_1\cdots i_k}\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}\in\Lambda_C^*(n),$$

那么

$$\begin{aligned}\xi(A,\ \xi(B,\ \theta))&=\xi(A,\ \sum\lambda_{i_1\cdots i_k}B_{j_1i_1}\cdots B_{j_ki_k}\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k})\\&=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\sum_{j_1,\cdots,j_k}\sum_{m_1,\cdots,m_k}\lambda_{i_1\cdots i_k}B_{j_1i_1}\cdots B_{j_ki_k}\\&\quad\times A_{m_1j_1}\cdots A_{m_kj_k}\theta_{m_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{m_k}\\&=\sum_{i_1,\cdots,i_k}\sum_{m_1,\cdots,m_k}\lambda_{i_1\cdots i_k}(A\cdot B)_{m_1i_1}\cdots\\&\quad\times(A\cdot B)_{m_ki_k}\theta_{m_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{m_k}\\&=\xi(A\cdot B,\ \theta).\end{aligned}$$

验证(ii): 由引理 5.1.5 即可推得.

验证(iii): 应当讨论如何从

$$(A,\ e_i)\mapsto\sum_j A_{ji}e_j=\zeta(A,\ e_i)$$

扩张成 $O(n)$ 在代数 $C_n(-1)$ 上的作用. 如果令

$$\zeta(A,\ 1)=1,$$

$$\zeta(A,\ e_{i_1}\cdots e_{i_k})=\zeta(A,\ e_{i_1})\cdots\zeta(A,\ e_{i_k}),$$

那么需验证

$$\zeta(A,\ e_ie_j)+\zeta(A,\ e_je_i)=-2\delta_{ij}.$$

具体的计算请读者自己补上.

验证(iv): 若 $g=A\in O(n)$; $c=e_i$; $v=\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}$, 则

$$\begin{aligned}\xi(g,\ \eta(c,\ v))&=\xi(A,\ \theta_i\wedge\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}-l_i(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}))\\&=\sum_{j,j_1,\cdots,j_k}A_{ji}A_{j_1i_1}\cdots A_{j_ki_k}\theta_j\wedge\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k}\\&\quad+\sum_{s=1}^{k}(-1)^s\sum_{j_1,\cdots,\hat{j}_s,\cdots,j_k}\delta_{ii_s}A_{j_1i_1}\cdots\widehat{A_{j_si_s}}\cdots A_{j_ki_k}\\&\quad\times\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\hat{\theta}_{j_s}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k}\\&=(A\theta_i)\wedge(A\theta_{i_1})\wedge\cdots\wedge(A\theta_{i_k})\\&\quad+\sum_{s=1}^{k}(-1)^s\sum_{l=1}^{n}A_{li}A_{li_s}(A\theta_{i_1})\wedge\cdots\\&\quad\wedge\widehat{(A\theta_{i_s})}\wedge\cdots\wedge(A\theta_{i_k})\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=(A\theta_i)\wedge(A\theta_{i_1})\wedge\cdots\wedge(A\theta_{i_k})\\
&\quad-\sum_{l=1}^{n}A_{il}l_l((A\theta_{i_1})\wedge\cdots\wedge(A\theta_{i_k}))\\
&=\sum_{m=1}^{n}A_{im}(e_m-l_m)((A\theta_{i_1})\wedge\cdots\wedge(A\theta_{i_k}))\\
&=\eta(\zeta(g,\ c),\ \xi(A,\ v)).
\end{aligned}
$$

若 $c=e_{j_1}\cdots e_{j_k}$, 那么利用上面的结果有

$$
\begin{aligned}
\xi(g,\ \eta(c,\ v))&=\xi(g,\ \eta(e_{j_1},\ \eta(e_{j_2}\cdots e_{j_k},\ v)))\\
&=\eta(\zeta(g,\ e_{j_1}),\ \xi(g,\ \eta(e_{j_2}\cdots e_{j_k},\ v)))\\
&=\eta(\zeta(g,\ e_{j_1}),\ \eta(\zeta(g,\ e_{j_2}),\\
&\qquad\xi(g,\ \eta(e_{j_3}\cdots e_{j_k},\ v))))\\
&=\eta(\zeta(g,\ e_{j_1}e_{j_2}),\ \xi(g,\ \eta(e_{j_3}\cdots e_{j_k},\ v)))\\
&=\cdots\\
&=\eta(\zeta(g,\ e_{j_1}e_{j_2}\cdots e_{j_k}),\ \xi(g,\ v))\\
&=\eta(\zeta(g,\ c),\ \xi(g,\ v)).
\end{aligned}
$$

于是(i)～(iv)验证完毕.

例 8.1.5 预 Signature 模

$2n$ 阶预 Signature 模是一个 $2n$ 阶 G-Clifford 模, 其中

$$G=SO(2n),\quad V=A_{\mathbf{C}}^*(2n),$$

$\xi,\ \eta,\ \zeta$ 的定义同例 8.1.4.

注 8.1.6 上面定义的预 Signature 模几乎就是一个预 de Rham-Hodge 模. 但是在 § 8.3 中它们各自配备超结构之后, 就大不一样了.

例 8.1.7 预 Riemann-Roch 模

$2n$ 阶预 Riemann-Roch 模是一个 $2n$ 阶 G-Clifford 模, 其中

$$
\begin{aligned}
G&=U(n)\\
&=\{A+\sqrt{-1}B\mid A,\ B\in GL(n,\ \mathbf{R}),\\
&\qquad(A+\sqrt{-1}B)^t(A-\sqrt{-1}B)=1\},\\
V&=A_{\mathbf{C}}^*(n),
\end{aligned}
$$

$\xi,\ \eta,\ \zeta$ 满足下列等式:

$$\xi(A+\sqrt{-1}B,\ \theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k})$$
$$=\sum_{j_1,\cdots,j_k}(A+\sqrt{-1}B)_{j_1i_1}\cdots(A+\sqrt{-1}B)_{j_ki_k}\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k},$$

$$\eta(e_\alpha,\ \theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k})=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_i-l_i)(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}), & \text{当 } \alpha=i;\\[2ex] \dfrac{\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}(\varepsilon_i+l_i)(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}), & \text{当 } \alpha=n+i.\end{cases}$$

$$(\zeta(A+\sqrt{-1}B,\ e_1),\ \cdots,\ \zeta(A+\sqrt{-1}B,\ e_{2n}))$$
$$=(e_1,\ \cdots,\ e_{2n})\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}.$$

请读者验证，上面确实定义了一个 $2n$ 阶 G-Clifford 模。

例 8.1.8 双旋量空间

设$(\mathrm{Spin}(2n),\ O_{2n}(-1),\ S(2n);\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$是例 8.1.3 中的旋量空间（或称预 Dirac 模）。令

$$(\mathrm{Spin}(2n),\ O_{2n}(-1),\ S(2n)\otimes S(2n);\ \tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta})$$

满足

$$\tilde{\xi}:\ \mathrm{Spin}(2n)\times(S(2n)\otimes S(2n))\to(S(2n)\otimes S(2n)):$$
$$(g,\ v_1\otimes v_2)\mapsto\xi(g,\ v_1)\otimes\xi(g,\ v_2),$$
$$\tilde{\eta}:\ O_{2n}(-1)\times(S(2n)\otimes S(2n))\to(S(2n)\otimes S(2n)):$$
$$(c,\ v_1\otimes v_2)\mapsto\eta(c,\ v_1)\otimes v_2,$$
$$\tilde{\zeta}=\zeta:\ \mathrm{Spin}(2n)\times O_{2n}(-1)\to O_{2n}(-1).$$

容易验证它是一个 $2n$ 阶 G-Clifford 模，称为 $2n$ 阶双旋量空间或 $2n$ 阶双 Dirac 模。

例 8.1.9 扭化 G-Clifford 模

设$(G,\ O_n(-1),\ V;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$是一个 n 阶 G-Clifford 模，又设 W 是一个 G_0 模，其中 G_0 是一个群。定义一个 G-Clifford 模 $(G\times G_0,\ O_n(-1),\ V\otimes W;\ \tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta})$，

使得有

$$\tilde{\xi}:\ (G\times G_0)\times(V\otimes W)\to(V\otimes W):\ ((g,\ g_0),\ v\otimes w)$$
$$\mapsto\xi(g,\ v)\otimes g_0w,$$

$$\tilde{\eta}: C_n(-1)\times(V\otimes W)\to(V\otimes W): (c,\ v\otimes w)\mapsto\eta(c,\ v)\otimes w,$$

$$\tilde{\zeta}: (G\times G_0)\times C_n(-1)\to C_n(-1): ((g,\ g_0),\ c)\mapsto\zeta(g,\ c).$$

请验证上述定义的确实是一个 n 阶 G-Clifford 模. 我们称 $(G\times G_0,\ C_n(-1),\ V\otimes W;\ \tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta})$ 是扭化的 G-Clifford 模, 或是 $(G,\ C_n(-1),\ V;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ 的扭化. 有时也把 $(G\times G_0,\ C_n(-1),\ V\otimes W;\ \tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta})$ 简记为

$$(G,\ C_n(-1),\ V;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)\otimes(G_0,\ W).$$

例 8.1.10 诱导 G-Clifford 模

设 $(G,\ C_n(-1),\ V;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$ 是一个 n 阶 G-Clifford 模, 且 $\rho: H\to G$ 是一个群同态. 令

$$\tilde{\xi}: H\times V\to V: (h,\ v)\mapsto\xi(\rho(h),\ v),$$

$$\tilde{\eta}=\eta: C_n(-1)\times V\to V,$$

$$\tilde{\zeta}: H\times C_n(-1)\to C_n(-1): (h,\ c)\mapsto\zeta(\rho(h),\ c).$$

则 $(H,\ C_n(-1),\ V;\ \tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta})$ 是一个 n 阶 G-Clifford 模, 有时简记为 $\rho^*(G,\ C_n(-1),\ V;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$. 这个 G-Clifford 模称为诱导模.

习题 8.1.11 令

$$\tilde{\rho}: \mathrm{Spin}(2n)\to\mathrm{Spin}(2n)\times\mathrm{Spin}(2n): g\mapsto(g,\ g).$$

试用例 8.1.9 与例 8.1.10 的概念证明双旋量空间 (例 8.1.8) 有下列表示:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ S(2n)\otimes S(2n);\ \tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta})\\&\quad=\tilde{\rho}^*((\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ S(2n);\ \xi,\ \eta,\ \zeta)\\&\qquad\otimes(\mathrm{Spin}(2n),\ S(2n))).\end{aligned}$$

定义 8.1.12 设 $(G,\ C_n(-1),\ V_1;\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta)$ 与 $(G,\ C_n(-1),\ V_2;\ \xi_2,\ \eta_2,\ \zeta)$ 是两个 G-Clifford 模 (注意它们有相同的 G, $C_n(-1)$, ζ). 如果存在向量空间同构:

$$\Phi: V_1\to V_2,$$

使得下列两个图表交换:

$$
\begin{array}{ccc}
G\times V_1 & \xrightarrow{\xi_1} & V_1\\
{\scriptstyle 1\times\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi}\\
G\times V_2 & \xrightarrow{\xi_2} & V_2,
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
C_n(-1)\times V_1 & \xrightarrow{\eta_1} & V_1\\
{\scriptstyle 1\times\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi}\\
C_n(-1)\times V_2 & \xrightarrow{\eta_2} & V_2
\end{array}
$$

则称 Φ 是上述两 G-Clifford 模的同构.

设 ρ: $\mathrm{Spin}(2n)\to \mathrm{SO}(2n)$ 是命题 5.1.4(iii) 中的同态, 又 ρ_0: $SO(2n)\to O(2n)$ 是嵌入同态. 记

$$
\begin{aligned}
&(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ \Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n);\ \xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0)\\
&\quad=(\rho_0\rho)^*(2n\ \text{阶预 de Rham-Hodge 模}),\\
&(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ S(2n)\otimes S(2n);\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_1)\\
&\quad=\text{双旋量空间}.
\end{aligned}
$$

容易验证(参见命题 5.1.4)

$$\zeta_0=\zeta_1: \mathrm{Spin}(2n)\times C_{2n}(-1)\to C_{2n}(-1).$$

命题 8.1.13　作为 Spin$(2n)$-Clifford 模而言, 预 de Rham-Hodge 模与双旋量空间是同构的, 即存在向量空间同构

$$\Phi: \Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n)\to S(2n)\otimes S(2n),$$

使得下列两图表可交换:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Spin}(2n)\times\Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n) & \xrightarrow{\xi_0} & \Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n)\\
{\scriptstyle 1\times\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi}\\
\mathrm{Spin}(2n)\times(S(2n)\otimes S(2n)) & \xrightarrow{\xi_1} & S(2n)\otimes S(2n);
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
C_{2n}(-1)\times\Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n) & \xrightarrow{\eta_0} & \Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n)\\
{\scriptstyle 1\times\Phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Phi}\\
C_{2n}(-1)\times(S(2n)\otimes S(2n)) & \xrightarrow{\eta_1} & S(2n)\otimes S(2n).
\end{array}
$$

换句话说, 图表

$$
\mathrm{Spin}(2n)\ \begin{array}{l}\xrightarrow{\xi_0}\ \mathrm{End}(\Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n))\\ \qquad\qquad\quad\downarrow{\scriptstyle\Phi_*}\\ \xrightarrow{\xi_1}\ \mathrm{End}(S(2n)\otimes S(2n))\end{array}
$$

$$
C_{2n}(-1)\ \begin{array}{l}\xrightarrow{\eta_0}\ \mathrm{End}(\Lambda^*_{\mathbf{C}}(2n))\\ \qquad\qquad\quad\downarrow{\scriptstyle\Phi_*}\\ \xrightarrow{\eta_1}\ \mathrm{End}(S(2n)\otimes S(2n))\end{array}
$$

是交换的，其中 $\mathrm{End}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n))=\mathrm{Hom}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n),\ \Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n))$，$\Phi_*$ 由下式确定：

$$\Phi_*(\varphi)(u)=\Phi\circ\varphi\circ\Phi^{-1}(u),$$
$$\forall\varphi\in\mathrm{End}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n)),\quad u\in S(2n)\otimes S(2n).$$

证明 命题5.1.7表明

$$\begin{aligned}\mathrm{End}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n))&=C_{2n}(1,\ -1)\otimes\mathbf{C}\\&=\mathrm{alg}_{\mathbf{C}}\{e_1^-,\ \cdots,\ e_{2n}^-,\ e_1^+,\ \cdots,\ e_{2n}^+\}.\end{aligned}$$

利用 $S(2n)$ 中的超结构

$$S(2n)=S^+(2n)+S^-(2n)$$

和命题5.2.9，得

$$\mathrm{End}(S(2n)\otimes S(2n))\xlongequal{\hat{\mathfrak{R}}}\mathrm{End}(S(2n))\hat{\otimes}\mathrm{End}(S(2n)).$$

又由定理5.1.8，得

$$\begin{aligned}&\mathrm{End}(S(2n))\hat{\otimes}\mathrm{End}(S(2n))\\&\quad=(C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C})\hat{\otimes}(C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C})\\&\quad=\mathrm{alg}_{\mathbf{C}}\{e_1,\ \cdots,\ e_{2n},\ \tilde{e}_1,\ \cdots,\ \tilde{e}_{2n}\}.\end{aligned}$$

上式中的 e_i、$\tilde{e}_i$ 分别记为 $(C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C})\hat{\otimes}(C_{2n}(-1)\otimes\mathbf{C})$ 中的 $e_i\otimes 1$ 和 $1\otimes e_i$. 用下式

$$\Psi(e_i^-)=e_i,\ \Psi(e_i^+)=-\sqrt{-1}\tilde{e}_i,$$

定义复代数同构(将 Ψ 的定义与定理5.1.8中的 $\mathfrak{R}_2$ 相比较)：

$$\begin{aligned}\Psi:&\mathrm{alg}_{\mathbf{C}}\{e_1^-,\ \cdots,\ e_{2n}^-,\ e_1^+,\ \cdots,\ e_{2n}^+\}\\&\to\mathrm{alg}_{\mathbf{C}}\{e_1,\ \cdots,\ e_{2n},\ \tilde{e}_1,\ \cdots,\ \tilde{e}_{2n}\}.\end{aligned}$$

借助前面的等同，便有代数同构：

$$\Psi:\ \mathrm{End}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n))\to\mathrm{End}(S(2n)\otimes S(2n)).$$

在证明的结尾部分，我们将造出线性空间的同构：

$$\Phi:\ \Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n)\to S(2n)\otimes S(2n),$$

使得 $\Psi=\Phi_*$. 因此先来验证等式：

$$\Psi\xi_0=\xi_1,\quad \Psi\eta_0=\eta_1.$$

因为 $\Psi\xi_0$ 和 ξ_1 是群同态，故只需对

$$g=-e_\alpha(\cos t\cdot e_\alpha+\sin t\cdot e_\beta)\quad(1\leqslant\alpha<\beta\leqslant 2n)$$

证明 $\Psi\xi_0(g)=\xi_1(g)$，之后便得 $\Psi\xi_0=\xi_1$. 由引理 7.2.3 的证明中的计算知

$$\rho(g)=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ & & & \cos 2t & \cdots & \sin 2t & & & \\ & & & & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & 1 & & & \\ & & & -\sin 2t & & \cos 2t & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ (\text{第}\alpha\text{行}) \\ \\ \\ \\ (\text{第}\beta\text{行}) \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$\xi_0(g)$具有下列两条性质：

（i）对于任意的 $\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}$，有

$$\xi_0(g)(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k})=(\xi_0(g)\theta_{i_1})\wedge\cdots\wedge(\xi_0(g)\theta_{i_k}).$$

（ii）$\xi_0(g)\theta_i=\sum_j(\rho(g)_{ji}\theta_j)=\theta_i+(\cos 2t-1)(\delta_{i\alpha}\theta_\alpha+\delta_{i\beta}\theta_\beta)$

$$+\sin 2t(\delta_{i\alpha}\theta_\beta-\delta_{i\beta}\theta_\alpha).$$

现在证明 $\Psi^{-1}\xi_1(g)$也具有上述性质(i)与(ii). 首先有

$$\begin{aligned}\Psi^{-1}\xi_1(g)&=\Psi^{-1}(e_\alpha(\cos t\cdot e_\alpha+\sin t\cdot e_\beta)\tilde{e}_\alpha(\cos t\cdot\tilde{e}_\alpha+\sin t\cdot\tilde{e}_\beta))\\&=-e_\alpha^-(\cos t\cdot e_\alpha^-+\sin t\cdot e_\beta^-)e_\alpha^+(\cos t\cdot e_\alpha^++\sin t\cdot e_\beta^+)\\&=\cos^2 t+\sin t\cdot\cos t\cdot(e_\alpha^+e_\beta^+-e_\alpha^-e_\beta^-)+\sin^2 t\cdot e_\alpha^-e_\alpha^+e_\beta^-e_\beta^+.\end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned}e_\alpha^+e_\beta^+&=(\varepsilon_\alpha+l_\alpha)(\varepsilon_\beta+l_\beta)=\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta+l_\alpha l_\beta+\varepsilon_\alpha l_\beta+l_\alpha\varepsilon_\beta,\\e_\alpha^-e_\beta^-&=(\varepsilon_\alpha-l_\alpha)(\varepsilon_\beta-l_\beta)=\varepsilon_\alpha\varepsilon_\beta+l_\alpha l_\beta-\varepsilon_\alpha l_\beta-l_\alpha\varepsilon_\beta,\\e_\alpha^+e_\beta^+-e_\alpha^-e_\beta^-&=2(\varepsilon_\alpha l_\beta+l_\alpha\varepsilon_\beta)=2(\varepsilon_\alpha l_\beta-\varepsilon_\beta l_\alpha),\\e_\alpha^-e_\alpha^+&=(\varepsilon_\alpha-l_\alpha)(\varepsilon_\alpha+l_\alpha)=2\varepsilon_\alpha l_\alpha-1,\\e_\alpha^-e_\alpha^+e_\beta^-e_\beta^+&=(2\varepsilon_\alpha l_\alpha-1)(2\varepsilon_\beta l_\beta-1)\\&=4\varepsilon_\alpha l_\alpha\varepsilon_\beta l_\beta-2(\varepsilon_\alpha l_\alpha+\varepsilon_\beta l_\beta)+1.\end{aligned}$$

故

$$\Psi^{-1}\xi_1(g)=\cos^2 t+2\sin t\cdot\cos t\cdot(\varepsilon_\alpha l_\beta-\varepsilon_\beta l_\alpha)$$

$$
\begin{aligned}
&+\sin^2 t\cdot(4\varepsilon_\alpha l_\alpha \varepsilon_\beta l_\beta-2\varepsilon_\alpha l_\alpha-2\varepsilon_\beta l_\beta)+\sin^2 t\\
=&1+\sin 2t\cdot(\varepsilon_\alpha l_\beta-\varepsilon_\beta l_\alpha)\\
&-(\cos 2t-1)(2\varepsilon_\alpha l_\alpha \varepsilon_\beta l_\beta-\varepsilon_\alpha l_\alpha-\varepsilon_\beta l_\beta).
\end{aligned}
$$

由此易得

$$
\begin{aligned}
\Psi^{-1}\xi_1(g)\theta_i=&\theta_i+\sin 2t\cdot(\delta_{\beta i}\theta_\alpha-\delta_{\alpha i}\theta_\beta)\\
&+(\cos 2t-1)(\delta_{\alpha i}\theta_\alpha+\delta_{\beta i}\theta_\beta).
\end{aligned}
$$

从而 $\Psi^{-1}\xi_1(g)$ 满足上述性质(ii)．接着上面的讨论还可以推得:

(iii) 当 $i\neq\alpha、\beta$ 时, $\Psi^{-1}\xi_1(g)\theta_i=\theta_i$, 并且

$$
\begin{aligned}
&\Psi^{-1}\xi_1(g)(\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k}\wedge\theta_i)\\
&=(\Psi^{-1}\xi_1(g)(\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k}))\wedge\theta_i\\
&=(\Psi^{-1}\xi_1(g)(\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_k}))\wedge(\Psi^{-1}\xi_1(g)\theta_i).
\end{aligned}
$$

(iv) $\Psi^{-1}\xi_1(g)(\theta_\alpha\wedge\theta_\beta)=\theta_\alpha\wedge\theta_\beta$, 且

$$
\begin{aligned}
&(\Psi^{-1}\xi_1(g)\theta_\alpha)\wedge(\Psi^{-1}\xi_1(g)\theta_\beta)\\
&=(\theta_\alpha-\sin 2t\cdot\theta_\beta+(\cos 2t-1)\theta_\alpha)\\
&\quad\wedge(\theta_\beta+\sin 2t\cdot\theta_\alpha+(\cos 2t-1)\theta_\beta)\\
&=(\cos 2t\cdot\theta_\alpha-\sin 2t\cdot\theta_\beta)\wedge(\cos 2t\cdot\theta_\beta+\sin 2t\cdot\theta_\alpha)\\
&=\theta_\alpha\wedge\theta_\beta.
\end{aligned}
$$

由(iii)和(iv)立即可推得(i)．于是 $\xi_0(g)=\Psi^{-1}\xi_1(g)$, 从而 $\Psi\xi_0=\xi_1$．至于图表

$$
C_{2n}(-1)\begin{cases}\xrightarrow{\eta_0}\mathrm{End}(\Lambda_C^*(2n))\\ \qquad\qquad\quad\downarrow\Psi\\ \xrightarrow{\eta_1}\mathrm{End}(S(2n)\otimes S(2n))\end{cases}
$$

的交换可如下证明: 因为 $\eta_0、\Psi、\eta_1$ 皆是代数同态, 故只需证明

$$
\Psi\eta_0(e_i)=\eta_1(e_i),\ \forall i.
$$

就够了．由于

$$
\begin{aligned}
\eta_0(e_i)&=e_i^-,\\
\eta_1(e_i)&=e_i\otimes 1=e_i,\\
\Psi(e_i^-)&=e_i\otimes 1.
\end{aligned}
$$

故欲证的等式成立．现在我们造 Φ 使得

$$\Psi=\Phi_*.$$

令 $\tilde{e}_i=e_{2n+i}$，于是有下列代数同构：

$$\begin{aligned}C_{4n}(-1)&=\mathrm{alg}_{\mathbf{C}}\{e_1,\ \cdots,\ e_{2n},\ e_{2n+1},\ \cdots,\ e_{4n}\}\\&=\mathrm{alg}_{\mathbf{C}}\{e_1,\ \cdots,\ e_{2n},\ \tilde{e}_1,\ \cdots,\ \tilde{e}_{2n}\}\\&\overset{\Psi}{=}\mathrm{alg}_{\mathbf{C}}\{e_1^-,\ \cdots,\ e_{2n}^-,\ \sqrt{-1}e_1^+,\ \cdots,\ \sqrt{-1}e_{2n}^+\},\end{aligned}$$

从而 $\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n)$ 与 $S(2n)\otimes S(2n)$ 便是 $C_{4n}(-1)$ 模. 它们的维数皆是 2^{2n}. 显然它们都不是平凡模. 由定理 5.1.8 知，它们必是不可约的 Clifford 模，从而是等价的. 故存在向量空间同构(在差一常数倍数下是唯一的)：

$$\Phi:\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n)\to S(2n)\otimes S(2n)$$

使得对于任意的 $\varphi\in\mathrm{End}(\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n))$, $\quad v\in\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n)$，有

$$\Phi\varphi(v)=\Psi(\varphi)\Phi(v).$$

以 $v=\Phi^{-1}(u)$ 代入上式，即得

$$\Psi(\varphi)=\Phi\varphi\Phi^{-1},$$

或 $\Psi=\Phi_*$.

习题 8.1.14 根据第 5 章 §5.1 中的定义，$S(2n)=\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)$. 于是 $S(2n)\otimes S(2n)=\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)\otimes\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)$. 现在定义一个向量空间的同构 $f:\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)\otimes\Lambda_{\mathbf{C}}^*(n)\to\Lambda_{\mathbf{C}}^*(2n)$，满足：

$$\begin{aligned}&f(\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}\otimes\theta_{j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{j_l})\\&\quad=\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_k}\wedge\theta_{n+j_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{n+j_l}.\end{aligned}$$

试证这个 f 不是命题 8.1.13 中的 Φ^{-1}.

§8.2 G 结 构

按照通常的理解，一个 n 维流形 M 的 G 结构是指三件事，它们是：(1)一个 M 上的 G 主丛 P；(2)一个 G 在 $\mathbf{R}^n$ 上的左作用

$$\zeta:G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n;$$

(3)一个实向量丛的同构

$$\varphi:P\times_\zeta\mathbf{R}^n\to TM.$$

在上面的理解中，流形 M 上并没有给定黎曼度量. 为了本书讨论的需要，给出如下定义：

定义 8.2.1 设 M 是 n 维黎曼流形，它的一个 G 结构是 (P, ζ, φ)，其中

(1) P 是一个 M 上的 G 主丛；

(2) $\zeta: G\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n$ 是一个群 G 在向量空间 $\mathbf{R}^n$ 上的左作用；

(3) $\varphi: P\times_\zeta\mathbf{R}^n\to TM$ 是一个向量丛的同构，并且满足下列两条性质：

(i) 对于任意的 $g\in G$；v_1、$v_2\in\mathbf{R}^n$，有

$$\langle\zeta(g, v_1), \zeta(g, v_2)\rangle=\langle v_1, v_2\rangle,$$

其中<, >是 $\mathbf{R}^n$ 中的标准内积.

(ii) 设

$$\delta_i=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}(\text{第 } i \text{ 位})\in\mathbf{R}^n,$$

则对于 P 的任一局部截面 σ，向量丛 $P\times_\zeta\mathbf{R}^n$ 的截面集 $\{(\sigma, \delta_1), \cdots, (\sigma, \delta_n)\}$ 经 φ 映为 M 上的幺正标架场：

$$\{E_1, \cdots, E_n\}=\{\varphi((\sigma, \delta_1)), \cdots, \varphi((\sigma, \delta_n))\}.$$

黎曼流形 M 上的一个 G 结构 (P, ζ, φ) 有时简记为 P.

定义 8.2.2 设 $(G, C_n(-1), V; \xi, \eta, \zeta)$ 是一个 G-Clifford 模；M 是一个 n 维黎曼流形，其上具有一个 G 结构 (P, ζ_0, φ)，使得当等同

$$e_i=\delta_i$$

之后，ζ_0 是 ζ 的限制. 又设在 G 主丛 P 上取定一个联络 $\{\omega_\sigma\}$. 则可用下列手续构造一个一阶微分算子：

$$D: \Gamma(E)\to\Gamma(E),$$

其中 $E=P\times_{\xi}V$ 是 M 上的向量丛. 对于 $\theta\in\Gamma(E)$, 任取 P 的一个局部截面 σ, θ 可表为

$$\theta=(\sigma, f)\in\Gamma(P\times_{\xi}V),$$

令 $E_i=\varphi((\sigma, \delta_i))$, 则 $D\theta$ 有下列表达式:

$$D\theta=\left(\sigma, \sum_{i=1}^{n}e_i\cdot(E_if)+\sum_{i=1}^{n}e_i\omega_\sigma(E_i)f\right),$$

其中 e_if 理解为 $\eta(e_i, f)$; $\omega_\sigma(E_i)$是 G 的李代数 $\mathfrak{G}$ 中的元素, 它在 f 上的作用是由

$$\xi: G\to\mathrm{End}(V)$$

导出的. 在验证 D 的定义与 σ 的选取无关之后, 我们称算于 D 是一个 Laplace 平方根算子.

注 8.2.3 验证 D 的定义与 σ 的选取无关这一事实, 请读者自己试作. 定义 8.2.2 中的主丛联络$\{\omega_\sigma\}$可以随意任取, 可以和流形 M 上的 Levi-Civita 联络没有关系. 但是如果想进一步讨论算子 D, 例如讨论 D 的 Weitzenböck 公式、局部指标定理等, 对联络 $\{\omega_\sigma\}$ 的取法会极大地影响结论. 也许读者会问: 是不是有一个统一的方法选取"最好"的$\{\omega_\sigma\}$呢? 对于旋量空间 (预 Dirac 模)、预 de Rham-Hodge 模、预 Signature 模、双旋量空间等情形, 可以找到唯一的$\{\omega_\sigma\}$, 使得它经过 φ 在切丛 TM 上的配联络恰是 M 的 Levi-Civita 联络. 但是在预 Rieman-Roch 模的情形, 上面的选优作法一般却不行, 只在 M 是 Kähler 流形时才可以. 所以选取好的$\{\omega_\sigma\}$一事应个别处理.

习题 8.2.4 定义 8.2.2 中用到的 G-Clifford 模如果取作 de Rham-Hodge 模和双旋量空间, 便得到两个微分算子 (Spin$(2n)$主丛 P 的联络$\{\omega_\sigma\}$如注 8.2.3 中所说的取法). 试证这两个微分算子可以等同起来.

§8.3 超 结 构

一个微分算子

$$D:\Gamma(E)\to\Gamma(E)$$

经过限制得到

$$D_+:\Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-),$$

这一手续是至关重要的. 这是因为从

$$d+\delta: \Lambda^*(M)\to\Lambda^*(M)$$

既可得到 de Rham-Hodge 算子, 也可得到 Signature 算子, 而这两个算子的差别实在太大了. 所以我们要认真对待关于 D 的限制手续. 为此我们引进 G-Clifford 模的超结构.

定义 8.3.1 设$(G, C_n(-1), V; \xi, \eta, \zeta)$是一个 n 阶 G-Clifford 模, 它的一个超结构是向量空间 V 的一个超结构 ε, 即 V 的直和分解

$$V\overset{\varepsilon}{=\!=}V_0+V_1,$$

使得下列两条件成立:

(i) η: $C_n(-1)\to\mathrm{End}(V_0+V_1)$ 是超代数同态, 其中 $C_n(-1)$和 $\mathrm{End}(V_0+V_1)$的超结构分别参见习题 5.2.7 和定义 5.2.3.

(ii) $\xi(G)\subset(\mathrm{End}(V_0+V_1))_0$.

具有超结构的 G-Clifford 模叫作超 G-Clifford 模, 并记为

$$(G, C_n(-1), V_0+V_1; \xi, \eta, \zeta).$$

引理 8.3.2 设定义 8.2.2 中的 G-Clifford 模$(G, C_n(-1), V; \xi, \eta, \zeta)$有一个超结构 ε, 其余假设不变, 则造出的微分算子

$$D:\Gamma(E)\to\Gamma(E).$$

可以限制为 $\quad D_+\equiv D:\Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-),$

其中 $\quad E_+=P\times_\xi V_0,\quad E_-=P\times_\xi V_1.$

例 8.3.3 Dirac 模

在例 8.1.3 中的旋量空间(预 Dirac 模)中配上以下的超结构:

$$V_0=(S(2n))_0=S^+(2n),\quad V_1=(S(2n))_1=S^-(2n),$$

所得到的超 G-Clifford 模称为 Dirac 模.

例 8.3.4　de Rham-Hodge 模

在例 8.1.4 中配上以下的超结构：

$V_0=(\Lambda_C^*(n))_0=\Lambda_C^{even}(n)$，$V_1=(\Lambda_C^*(n))_1=\Lambda_C^{odd}(n)$，

所得到的超 G-Clifford 模称为 de Rham-Hodge 模.

例 8.3.5　Signature 模

在例 8.1.5 中配以命题 5.3.4 中提到的超结构(验证它也是 G-Clifford 代数的超结构)，所得到的超 G-Clifford 模称为 Signature 模.

例 8.3.6　Riemann-Roch 模

在例 8.1.7 中配以以下的超结构：

$V_0=(\Lambda_C^*(n))_0=\Lambda_C^{even}(n)$，$V_1=(\Lambda_C^*(n))_0=\Lambda_C^{odd}(n)$，

所得到的超 G-Clifford 模称为 Riemann-Roch 模.

例 8.3.7　扭化超 G-Clifford 模

在例 8.1.9 中更设$(G, C_n(-1), V; \xi, \eta, \zeta)$有超结构：

$$V=V_0+V_1,$$

则在扭化 G-Clifford 模中定义如下超结构：

$$(V\otimes W)_0=V_0\otimes W,\quad (V\otimes W)_1=V_1\otimes W.$$

从而得到扭化超 G-Clifford 模.

引理 8.3.8　设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形，其上有 $\mathrm{Spin}(2l)$ 结构(P, ζ_0, φ)，又设$(\mathrm{Spin}(2l), C_{2l}(-1), S^+(2n)+S^-(2n); \xi, \eta, \zeta)$是 Dirac 模(例 8.3.3). 再设 ζ_0 是 ζ 的限制. 令 $\{\omega_\sigma\}$ 是 P 上的联络，使得它经过 φ 在切丛 TM 上的配联络是 Levi-Civita 联络. 则由定义 8.2.2 和引理 8.3.2 得到的算子

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

是定义 7.2.1 中的 Dirac 算子.

引理 8.3.9　设 M 是 n 维黎曼流形，自然地有一个 $O(n)$ 结构$(O(M), \zeta_0, \varphi)$(见习题 1.4.12). 令 $O(M)$ 上的联络如习题 1.4.13 所述. 又设$(O(n), C_n(-1), \Lambda_C^{even}(n)+\Lambda_C^{odd}(n); \xi, \eta, \zeta)$是 de Rham-Hodge 模($\zeta_0$ 是 ζ 的限制这一条件自然成立). 则由定义 8.2.2 和引理 8.3.2 得到的算子

$$D_+: \Gamma(E_+) \to \Gamma(E_-)$$

是定义1.6.9中的de Rham-Hodge算子的复化.

引理8.3.10 设M是$2l$维定向黎曼流形. 令$SO(M)$是它的$SO(2l)$结构, 在$SO(M)$上取定习题1.4.13所说的联络. 又设$(SO(2l),\ C_{2l}(-1),\ \Lambda_+(2l)+\Lambda_-(2l);\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$是Signature模(例8.3.5), 其中$\Lambda_\pm(2l)$, 如用命题5.3.4的语言, 表为

$$\Lambda_\pm(2l)=\{\alpha\in\Lambda_C^*(2l)\,|\,\tau_l\alpha=\pm\alpha\}.$$

则由定义8.2.2和引理8.3.2得到的算子

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

是定义1.6.11中的Signature算子.

定义8.3.11 设M是n维Kähler流形. M上有自然的$U(n)$结构$(P,\ \zeta_0,\ \varphi)$, P上有联络$\{\omega_\sigma\}$使得它在TM上的配联络是Levi-Civita联络. 又设$(U(n),\ C_{2n}(-1),\ \Lambda_C^{\text{even}}(n)+\Lambda_C^{\text{odd}}(n);\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$是Riemann-Roch模(例8.3.6), 则由定义8.2.2和引理8.3.2得到的算子

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

称为Riemann-Roch算子.

注8.3.12 关于Riemann-Roch算子与全纯同调论的关系, 它的自伴随性, Weitzenböck公式以及在殆复Hermite流形上的推广等需要相当的篇幅才能说清楚, 所以在本书中就不介绍了.

定义8.3.13 设M是$2l$维定向黎曼流行, 其上有Spin$(2l)$结构$(P,\ \zeta_0,\ \varphi)$. 在P上有自然联络$\{\omega_\sigma\}$使得它在TM上的配联络是Levi-Civita联络. 又设P_0是M上的一个G_0主丛, 带有联络$\{\omega^0_{\sigma_*}\}$. 于是M上有Spin$(2l)\times G_0$主丛

$$P\otimes P_0=\{(p,\ p_0)\in P\times P_0\,|\,\pi(p)=\pi_0(p_0)\in M\},$$

其中$\pi: P\to M$和$\pi_0: P_0\to M$是主丛的投射. $P\otimes P_0$上有主丛联络$\{\omega_\sigma+\omega^0_{\sigma_*}\}$. 最后设$(\text{Spin}(2l),\ C_{2l}(-1),\ S^+(2l)+S^-(2l);\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$是Dirac模, W是G_0模. 从而按例8.3.7有扭化超G-Clifford模:

$$(\mathrm{Spin}(2l)\times G_0,\ C_{2l}(-1),\ S^+(2l)\otimes W$$
$$+S^-(2l)\otimes W;\ \tilde{\xi},\ \tilde{\eta},\ \tilde{\zeta}).$$

若上面的 ζ_0 是 ζ 的限制, 则由定义 8.2.2 和引理 8.3.2 得到的算子

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

称为扭化 Dirac 算子.

注 8.3.14　类似地, 我们可以定义扭化 de Rham-Hodge 算子、扭化 Signature 算子和扭化 Riemann-Roch 算子等.

定义 8.3.15　在旋量空间(例 8.1.3) 的构成中以 $C_{2n}(-1)$ 代替 $S(2n)$, 便有超 G-Clifford 模:

$$(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ C_{2n}^+(-1)+C_{2n}^-(-1);\ \xi,\ \eta,\ \zeta).$$

仿照引理 8.3.8 中的作法得到算子

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-)$$

称为增广 Dirac 算子.

定义 8.3.16　设给定一个超 G-Clifford 模

$$(G,\ C_n(-1),\ V_0+V_1;\ \xi,\ \eta,\ \zeta)$$

和一个具有 G 结构 $(P,\ \zeta)$ 的 n 维黎曼流形. 若在 P 上取定联络, 则按定义 8.2.2 和引理 8.3.2 得到

$$D_+: \Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-),$$

这个算子 D_+ 称为 Atiyah-Singer 算子.

Atiyah-Singer 算子与扭化 Dirac 算子的关系在局部上表现为超 G-Clifford 模与扭化 Dirac 模之间的关系. 下面的讨论将有助于看清它们之间的关系. 我们在命题 8.1.13 中曾断言下列两个 G-Clifford 模:

$$\rho^*(2n \text{ 阶预 Signature 模})$$
$$\equiv(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ \Lambda_C^*(2n);\ \xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0)$$

和

双旋量空间

$$\equiv(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ S(2n)\otimes S(2n);\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_0)$$

是同构的. 如在上述两个 G-Clifford 模中分别给以超结构:

$$\Lambda_C^*(2n)=\Lambda_+(2n)+\Lambda_-(2n),$$
$$S(2n)\otimes S(2n)=S^+(2n)\otimes S(2n)+S^-(2n)\otimes S(2n),$$
则得到两个超 G-Clifford 模.

命题 8.3.17 上述两个超 G-Clifford 模
$$(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ \Lambda_+(2n)+\Lambda_-(2n);\ \xi_0,\ \eta_0,\ \zeta_0)$$
和
$$(\mathrm{Spin}(2n),\ C_{2n}(-1),\ S^+(2n)\otimes S(2n)$$
$$+S^-(2n)\otimes S(2n);\ \xi_1,\ \eta_1,\ \zeta_0)$$
在 n 为偶数时是同构的.

证明 命题 8.1.13 构造了一个向量空间同构
$$\Phi:\Lambda_C^*(2n)\to S(2n)\otimes S(2n),$$
并证明它是 G-Clifford 模同构. 现在我们要证明: 在 n 为偶数时, Φ 保持超结构, 即
$$\Phi(\Lambda_+(2n))\subset S^+(2n)\otimes S(2n),$$
$$\Phi(\Lambda_-(2n))\subset S^-(2n)\otimes S(2n).$$
若把命题中的第一个超结构看成映射
$$\varepsilon_0:\Lambda_C^*(2n)\to\Lambda_C^*(2n),$$
使得
$$\varepsilon_0|_{\Lambda_+(2n)}=1,\quad \varepsilon_0|_{\Lambda_-(2n)}=-1,$$
把第二个超结构看成映射
$$\varepsilon_1:S(2n)\otimes S(2n)\to S(2n)\otimes S(2n),$$
使得
$$\varepsilon_1|_{S^+(2n)\otimes S(2n)}=1,\ \varepsilon_1|_{S^-(2n)\otimes S(2n)}=-1,$$
则 Φ 保持超结构就相当于下列等式成立:
$$\Phi\varepsilon_0=\varepsilon_1\Phi:\Lambda_C^*(2n)\to S(2n)\otimes S(2n).$$
我们分两步来证明上述等式. 首先要证明
$$(\Phi\varepsilon_0)_*=(\varepsilon_1\Phi)_*:\mathrm{End}(\Lambda_C^*(2n))\to\mathrm{End}(S(2n)\otimes S(2n)).$$
因为此处的 ε_0 就是引理 1.6.10 中的 τ, 由那里的(iv)可知: $e_i^+\varepsilon_0=\varepsilon_0e_i^+$, $e_i^-\varepsilon_0=-\varepsilon_0e_i^-$, 故 $(\varepsilon_0)_*e_i^\pm=\pm e_i^\pm$. 于是有
$$(\Phi\varepsilon_0)_*e_i^+=\Psi((\varepsilon_0)_*e_i^+)=\Psi(e_i^+)=-\sqrt{-1}\tilde{e}_i,$$
$$(\Phi\varepsilon_0)_*e_i^-=\Psi(-e_i^-)=-e_i,$$
$$(\varepsilon_1\Phi)_*e_i^+=(\varepsilon_1)_*(-\sqrt{-1}\,\tilde{e}_i)=-\sqrt{-1}\,\tilde{e}_i,$$

$$(\varepsilon_1\Phi)_* e_i^- = (\varepsilon_1)_*(e_i) = -e_i.$$

所以$(\Phi\varepsilon_0)_* = (\varepsilon_1\Phi)_*$. 从而存在常数$\lambda$, 使得

$$\Phi\varepsilon_0 = \lambda\varepsilon_1\Phi.$$

注意到 $\lambda^2 = (\lambda\varepsilon_1)^2 = (\Phi\varepsilon_0\Phi^{-1})^2 = \Phi\varepsilon_0\Phi^{-1}\Phi\varepsilon_0\Phi^{-1} = 1,$

故 $\lambda = 1$ 或 -1.

现在我们证明$\lambda = 1$: 对于$a \in \mathrm{End}(\Lambda_C^*(2n))$,

$$\Phi a\Phi^{-1} \in \mathrm{End}(S(2n)\otimes S(2n)),$$

在超结构ε_0、ε_1下的超迹分别记为$\widehat{\mathrm{tr}}_0$和$\widehat{\mathrm{tr}}_1$. 于是由$\Phi\varepsilon_0 = \lambda\varepsilon_1\Phi$及$\lambda = \pm 1$知

$$\widehat{\mathrm{tr}}_0(a) = \lambda\widehat{\mathrm{tr}}_1(\Phi a\Phi^{-1}) = \lambda\widehat{\mathrm{tr}}_1(\Psi(a)).$$

取$a = e_1^- \cdots e_{2n}^- e_1^+ \cdots e_{2n}^+$, 由命题5.3.4知

$$\widehat{\mathrm{tr}}_0(a) = (-4\sqrt{-1})^n.$$

由于

$$\Psi(a) = (-\sqrt{-1})^{2n} e_1 \cdots e_{2n}\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_{2n} = (-1)^n e_1 \cdots e_{2n}\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_{2n},$$

由命题5.3.1知

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{tr}}_1(\Psi(a)) &= (-1)^n \widehat{\mathrm{tr}}(e_1 \cdots e_{2n}) \cdot \mathrm{tr}(\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_{2n}) \\ &= (-1)^n \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^n \cdot 2^n \\ &= (4\sqrt{-1})^n.\end{aligned}$$

这样便得到 $\widehat{\mathrm{tr}}_0(a) = (-1)^n \widehat{\mathrm{tr}}_1(a).$

从而当n为偶数时,

$$\Phi\varepsilon_0 = \varepsilon_1\Phi.$$

命题得证.

最后请读者考虑在习题1.6.12中的算子所包容的超G-Clifford模. 根据$\widehat{\mathrm{tr}}$函数的性质, 考察它是否扭化Dirac模?

习题 8.3.18 试直接证明

$$e_1^- \cdots e_{2n}^- = (-1)^{\frac{p(p-1)}{2}} *: \Lambda^p(2n) \to \Lambda^{2n-p}(2n),$$

然后化简命题8.3.17的证明.

§8.4 扭化算子的局部指标定理

设 M 是 $2l$ 维定向黎曼流形，其上有 Spin$(2l)$结构 (P, ζ_0, φ). 又设 P_0 是 M 上的一个 G_0 主丛，带有联络$\{\omega'_{\sigma_0}\}$. 此外有一个 G_0 模 W, W 是一个 N 维复向量空间. 在 W 中我们还假定有一个艾米内积$\langle\, ,\rangle_H$, 使得对于任意的 $g_0\in G_0$; w_1、$w_2\in W$, 有

$$\langle g_0w_1,\ g_0w_2\rangle_H=\langle w_1,\ w_2\rangle_H.$$

这里的艾米内积是指：对于任意的 w_1、$w_2\in W$, $\langle w_1,\ w_2\rangle_H$ 是一个复数，并且满足：

(i) $\langle w_1,\ w_2\rangle_H=\overline{\langle w_2,\ w_1\rangle_H}$;

(ii) $\langle \lambda w_0+w_1,\ w_2\rangle_H=\lambda\langle w_0,\ w_2\rangle_H+\langle w_1,\ w_2\rangle_H$, $\forall\lambda\in\mathbf{C}$; w_0、w_1、$w_2\in W$;

(iii) $\langle w_1,\ w_1\rangle_H\geqslant 0$, 且等号成立的充要条件是 $w_1=0$.

现在令

$$E_\pm=(P\times P_0)\times_{\mathrm{Spin}(2l)\times G_0}(S^\pm(2l)\otimes W).$$

于是按照定义 8.3.13 有扭化 Dirac 算子：

$$D_+:\Gamma(E_+)\to\Gamma(E_-).$$

令

$$S_\pm=P\times_{\mathrm{Spin}(2l)}S^\pm(2l),$$

$$F=P_0\times_{G_0}W.$$

自然有

$$E_\pm=S_\pm\otimes F,$$

$$\Gamma(E_\pm)=\Gamma(S_\pm\otimes F)=\Gamma(S_\pm)\otimes\Gamma(F).$$

复向量丛 $S_\pm$ 上的联络如引理 7.2.2 所示. 具体地说，如果 σ 是 P 的一个局部截面，则丛 $S_\pm$ 的截面在局部上可以表为(σ, f), 其中 $f: U\to S^\pm(2l)$是一映射，U 是 σ 的定义域. 于是对于 $X\in\Gamma(TM)$, 有

$$\nabla_X(\sigma, f)=\left(\sigma,\ Xf-\frac{1}{4}\sum_{i,j}\omega_{ij}(X)e_ie_jf\right).$$

在 P_0 的配丛 F 上，我们把配联络记为 ∇'. 若 $\sigma_0: U\to P_0$ 是 P_0 的一个局部截面，$h: U\to W$ 是一映射，则

$$\nabla'_X(\sigma_0, h)=(\sigma_0, Xh+\omega'_{\sigma_0}(X)h).$$

上式中 $\omega'_{\sigma_0}(X)\cdot h$ 是 G_0 的李代数中的元素 $\omega'_{\sigma_0}(X)$ 自然作用在 G_0 模 W 中的元素 h 上. 向量丛 $E_\pm$ 上的联络若记为 $\tilde{\nabla}$, 则有

$$\tilde{\nabla}_X((\sigma, f)\otimes(\sigma_0, h))=(\nabla_X(\sigma, f))\otimes(\sigma_0, h)+(\sigma, f)\otimes\nabla'_X(\sigma_0, h).$$

引理 8.4.1 设 σ 是 P 的一个局部截面, 用第 7 章 § 7.2 中的记号, $\rho_1\sigma=\{E_1, \cdots, E_{2l}\}$ 是 M 上的局部幺正标架场, 则按照定义 8.1.13 作出的扭化 Dirac 算子可以表为:

$$D_+=\sum_{i=1}^{2l}(\sigma, e_i)\tilde{\nabla}_{E_i}.$$

具体地说, 对于 $\theta=(\sigma, f)\otimes(\sigma_0, h)\in\Gamma(E_+)$,

$$D_+\theta=\sum_{i=1}^{2l}\left\{\left(\sigma,\ e_iE_if-\frac{1}{4}\sum_{j,k}\omega_{jk}(E_i)e_ie_je_kf\right)\otimes(\sigma_0,\ h)+(\sigma, e_if)\otimes(\sigma_0, E_ih+\omega'_{\sigma_0}(E_i)h)\right\}.$$

证明 仔细检查扭化 Dirac 算子的过程, 便得到引理的证明.

$\Lambda^*_{\mathbb{C}}(l)$ 中有标准的艾米内积, 使得

$$\{\theta_{i_1}\wedge\cdots\wedge\theta_{i_s}|1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant l;\ s=0, 1, \cdots, l\}$$

是酉正标架. 从而在 $S^\pm(2l)$ 中便有艾米内积 $\langle\ ,\ \rangle_H$. 我们已假定在 W 中有艾米内积 $\langle\ ,\ \rangle_H$, 于是仿照第 1 章 § 1.6 中的方法, 在 $\Gamma(S_\pm\otimes F)$ 中定义艾米内积. 对于

$$u_i=(\sigma, f_i)\otimes(\sigma_0, h_i)\in\Gamma(S_\pm\otimes F),\ i=1, 2.$$

令 $$\langle\langle u_1, u_2\rangle\rangle_H=\int_M\langle f_1, f_2\rangle_H\cdot\langle h_1, h_2\rangle_H\mathrm{dvol}.$$

有了 $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle_H$, 我们定义 D_+ 的伴随算子 $D_+^\#$, 使得

$$\langle\langle D_+u_1, u_2\rangle\rangle_H=\langle\langle u_1, D_+^\# u_2\rangle\rangle,\quad \forall u_1, u_2\in\Gamma(E).$$

引理 8.4.2 假设同引理 8.4.1.

$$D_+^\#: \Gamma(S_-\otimes F)\to\Gamma(S_+\otimes F)$$

与 $$D_+: \Gamma(S_+\otimes F)\to\Gamma(S_-\otimes F)$$

有相同的表达式. 即对于 $u_2\in\Gamma(S_-\otimes F)$, 有

$$D_+^{\#}u_2=\sum_{i=1}^{2l}(\sigma,\ e_i)\tilde{\nabla}_{E_i}.$$

换句话说，当仿照定义 D_+ 而得到

$$D_-:\Gamma(E_-)\to\Gamma(E_+)$$

时，

$$D_+^{\#}=D_-.$$

证明 采用前面的记号，并记

$$v_i=(\sigma,\ f_i);\quad w_i=(\sigma_0,\ h_i),\ u_i=v_i\otimes w_i.$$

于是有

$$\begin{aligned}\langle D_+u_1,\ u_2\rangle_H&=\langle D_+(v_1\otimes w_1),\ v_2\otimes w_2\rangle_H\\&-\sum_i\langle(e_i\nabla_{E_i}v_1)\otimes w_1,\ v_2\otimes w_2\rangle_H\\&+\sum_i\langle e_iv_1\otimes\nabla_{E_i}w_1,\ v_2\otimes w_2\rangle_H\\&=\sum_i\{E_i\langle e_iv_1,\ v_2\rangle_H-\langle(\nabla_{E_i}e_i)v_1,\ v_2\rangle_H\\&-\langle e_iv_1,\ \nabla_{E_i}v_2\rangle_H\}\langle w_1,\ w_2\rangle_H\\&+\sum_i\langle e_iv_1,\ v_2\rangle_H\otimes\{E_i\langle w_1,\ w_2\rangle_H\\&-\langle w_1,\ \nabla'_{E_i}w_2\rangle_H\}\\&=\mathrm{div}\Big(\sum_i\langle e_iv_1,\ v_2\rangle_H\cdot\langle w_1,\ w_2\rangle_HE_i\Big)\\&+\langle u_1,\ \sum_i e_i\tilde{\nabla}_{E_i}u_2\rangle_H.\end{aligned}$$

上式中的 e_i 实际上代表 $(\sigma,\ e_i)$. 在艾米内积下计算时，用到的 E_i 是实向量，Levi-Civita 联络 ∇ 与 F 上的联络 ∇' 保持艾米内积. 从而证得引理 8.4.2.

令 $D=D_+\oplus D_-:\Gamma((S_+\oplus S_-)\otimes F)\to\Gamma((S_+\oplus S_-)\otimes F)$，
得如下引理:

引理 8.4.3(**Weitzenböck** 公式) 有下式成立:

$$D^2=-\tilde{\Delta}_0+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma,\ e_ie_j)R'(E_i,\ E_j)+\frac{1}{4}R,$$

其中 $\tilde{\Delta}_0$ 是从联络 $\tilde{\nabla}$ 造出的 Laplace-Beltrami 算子，R 是 M 的标量曲率，$R'(E_i,\ E_j)$ 是联络 ∇' 的曲率算子.

证明 与定理 7.2.6 的证明类似.

$$D^2=\sum_{i,j}(\sigma,\ e_i)\widetilde{\nabla}_{E_i}(\sigma,\ e_j)\widetilde{\nabla}_{E_j}$$
$$=\sum_{i,j}(\sigma,\ e_ie_j)(\widetilde{\nabla}_{E_i}\widetilde{\nabla}_{E_j}-\widetilde{\nabla}_{\nabla_{E_i}E_j})$$
$$=\sum_{i,j}(\sigma,\ e_ie_j)\widetilde{D}(E_i,\ E_j)$$
$$=-\widetilde{\Delta}_0+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma,\ e_ie_j)\widetilde{R}(E_i,\ E_j).$$

由于　$\widetilde{R}(E_i,\ E_j)=R(E_i,\ E_j)+R'(E_i,\ E_j)$

及　$\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma,\ e_ie_j)R(E_i,\ E_j)=\frac{1}{4}R,$

故　$D^2=-\widetilde{\Delta}_0+\frac{1}{4}R+\frac{1}{2}\sum_{i,j}(\sigma,\ e_ie_j)R'(E_i,\ E_j).$

从而引理得证.

现在我们考察超向量空间：

$$S^+(2l)\otimes W+S^-(2l)\otimes W$$

上的超迹. 若

$$a\otimes b\in \mathrm{End}(S^+(2l)+S^-(2l))\otimes \mathrm{End}(W)$$
$$=\mathrm{End}(S^+(2l)\otimes W,\ S^-(2l)\otimes W),$$

则易知　$\widehat{\mathrm{tr}}(a\otimes b)=\widehat{\mathrm{tr}}(a)\cdot \mathrm{tr}(b).$

故由命题 5.3.1, 即知 $S^+(2l)\otimes W+S^-(2l)\otimes W$ 上的超迹. 根据这个超迹, 仿照定义 7.2.8, 对于表达式

$$\alpha=\varphi_{\alpha_1}(y)\frac{\partial}{\partial y_{\beta_1}}\varphi_{\alpha_2}(y)\cdots\frac{\partial}{\partial y_{\beta_m}}\varphi_{\alpha_{m+1}}(y)(e_{j_1}\otimes b_1)\cdots(e_{j_s}\otimes b_s),$$

令　$\chi(\alpha)=m-\nu(\varphi_{\alpha_1}\cdots\varphi_{\alpha_{m+1}})+s,$

从而有类似于命题 7.2.10 的如下引理:

引理 8.4.4　设 D: $\Gamma(S\otimes F)\to\Gamma(S\otimes F)$ 是扭化 Dirac 算子, 则在取定 σ 与 σ_0 之后, 有

$$D^2=-\sum_i\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}+\frac{1}{4}\sum_{i,j,\alpha,\beta}R_{ij\alpha\beta}(\xi)y_i\frac{\partial}{\partial y_j}e_\alpha e_\beta$$
$$+\frac{1}{64}\sum_{\substack{i,j,k\\ \alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4}}y_iy_jR_{ik\alpha_1\alpha_2}(\xi)R_{kj\alpha_3\alpha_4}(\xi)e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}e_{\alpha_3}e_{\alpha_4}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i,j}e_ie_jR'(E_i,\ E_j)_\xi+(\chi<2).$$

上式中右端项是几何量在取定 σ 与 σ_0 之后的表现，其中 $R'(E_i, E_j)_\xi$ 是线性变换

$$R'(E_i, E_j)_\xi: F_\xi \to F_\xi.$$

它在 σ_0 下代表的丛映射

$$(\sigma_0, R'(E_i, E_j)_\xi): F|_U \to F|_U,$$

借用丛的局凡化

$$F|_U \xrightarrow{\cong} U \times F_\xi: (\sigma_0(y) \times_{G_0} w) \mapsto (y, \sigma_0(\xi) \times_{G_0} w)$$

之后，就是 $1 \times R'(E_i, E_j)_\xi$. 最后须说明引理中的 σ 不是随意的，它必须如同命题 7.2.10 中的一样.

本引理的证明与命题 7.2.10 相同，故在此省略.

由引理 8.4.4，我们可以将 D^2 写成

$$D^2 = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} + \frac{1}{64} \sum y_i y_j R_{ika_1a_2}(\xi) R_{kja_3a_4}(\xi) e_{a_1} e_{a_2} e_{a_3} e_{a_4} + \frac{1}{2} \sum e_i e_j R'(E_i, E_j)_\xi + \cdots.$$

仿照命题 6.2.7 的论证，可知上式右端的余项对局部指标没有作用. 继续论证下去便能得到扭化 Dirac 算子的局部指标定理. 对此，在这里就不再细述了，而将用陈根算法来求出扭化 Dirac 算子的结论. 如果我们比较引理 8.4.4 和命题 6.2.5，当把 e_i 与 E_i^- 等同之后，就发现两处的公式只有一个差别，表现在 $\frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i e_j R'(E_i, E_j)_\xi$ 与 $\frac{1}{8}\sum_{i,j,k,l} R_{ijkl}(\xi) E_i^+ E_j^+ E_k^- E_l^-$ 不同. 因此我们要考虑如何用陈根取代

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j} e_i e_j R'(E_i, E_j)_\xi.$$

关于复向量丛中示性式的陈根表示法，以前我们没有仔细介绍过，故在此须作适当详述. 设 F 是 M 上一个复 N 维向量丛，其上有艾米内积 $\langle\,,\rangle_H$. 又设 ∇' 是 F 上的一个联络(见定义 1.4.4). 如果它满足下列条件：

$$X\langle W_1, W_2\rangle_H = \langle \nabla'_X W_1, W_2\rangle_H + \langle W_1, \nabla'_X W_2\rangle_H,$$
$$\forall X \in T(TM),\ W_1、W_2 \in \Gamma(F),$$

则称 ∇' 是艾米联络. 取$\{W_1, \cdots, W_N\}$为 F 的局部标架场, 由曲率 $R'(\ ,\ )$的下列等式:

$$R'(\ ,\ )(W_1, \cdots, W_N)=(W_1, \cdots, W_N)\cdot\Omega'$$

决定一个取值在 $\mathfrak{gl}(N, \mathbf{C})$中的二次微分式 Ω'. 当 ∇' 是艾米联络, $\{W_1, \cdots, W_N\}$是酉正基, 即

$$\langle W_i, W_j\rangle_H=\delta_{ij}$$

时, Ω' 取值在 $\mathfrak{u}(N)$中, 其中 $\mathfrak{u}(N)$是群 $U(N)$的李代数, 即

$$\mathfrak{u}(N)=\{A\in\mathfrak{gl}(N, \mathbf{C})\,|\,\bar{A}^t=-A\}.$$

按照通常方式, 定义陈根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$, 使得

$$\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega'\right)=(1+\lambda_1)\cdots(1+\lambda_N),$$

换句话说,

$$\det\left(I+\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega'\right)=\det\left(I+\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\end{pmatrix}\right).$$

这就引导我们用下式

$$\frac{\sqrt{-1}}{2\pi}\Omega'=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_N\end{pmatrix}$$

作为以陈根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ 代替曲率的规则(它相当于引理 3.3.2 中的等式(*)). 于是

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j}e_ie_jR'(E_i, E_j)_t=\frac{\pi}{\sqrt{-1}}\sum_{i,j}e_ie_j\left(\sum_{m=1}^{N}\lambda_m(E_i, E_j)\theta_{mm}\right),$$

其中记号 θ_{mm} 的定义参见引理 3.3.2. 它是一个 N 阶矩阵, 在这里经 σ_0 自然理解为 F_t 中的一个线性变换. 把引理 3.4.4 中的等式删除右端第二项之后, 经陈根代换变为

$$D^2=-\sum_{i=1}^{2l}\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}-\frac{1}{16}\sum_{s=1}^{l}x_s^2(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)+\sum_{m=1}^{N}z_m\theta_{mm},$$

其中

$$x_s=\sum_{\alpha,\beta}\pi u_s(E_\alpha, E_\beta)e_\alpha e_\beta,$$

$$z_m=\sum_{\alpha,\beta}\frac{\pi}{\sqrt{-1}}\lambda_m(E_\alpha, E_\beta)e_\alpha e_\beta,$$

$\{u_s\}$和$\{\lambda_m\}$分别是 TM 与 F 的陈根. 故热算子 $\frac{\partial}{\partial t}+D^2$ 的基本

解 $G(t, y, \xi)$ 的陈根表达式是:

$$
\begin{aligned}
&G(t, y, \xi)\\
&=\left\{\prod_{s=1}^{l}\left[\frac{\sqrt{-1}x_s}{8\pi\cdot\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{-1}\,x_st}{2}}\exp\left(-\frac{\sqrt{-1}}{8}\left(x_s\cdot\coth\frac{\sqrt{-1}x_st}{2}\right)\right.\right.\right.\\
&\quad\left.\left.\left.\times(y_{2s-1}^2+y_{2s}^2)\right)\right]\right\}\cdot\exp\left(-\sum_{m=1}^{N}z_m\theta_{mm}t\right).
\end{aligned}
$$

易知:

(i) 当 $p+q<l$ 时,

$$\widehat{\mathrm{tr}}[x_{s_1}\cdots x_{s_p}(z_{m_1}\theta_{m_1m_1})\cdots(z_{m_q}\theta_{m_qm_q})]=0.$$

(ii) 当 $p+q=l$ 且 $m_1, \cdots, m_q$ 不全相等时,

$$\widehat{\mathrm{tr}}[x_{s_1}\cdots x_{s_p}(z_{m_1}\theta_{m_1m_1})\cdots(z_{m_q}\theta_{m_qm_q})]=0.$$

(iii) 当 $p+q=l$ 且 $m_1=\cdots=m_q=m$ 时,

$$
\begin{aligned}
&\widehat{\mathrm{tr}}[x_{s_1}\cdots x_{s_p}(z_{m_1}\theta_{m_1m_1})\cdots(z_{m_q}\theta_{m_qm_q})]\\
&\quad=\left[(2\pi u_{s_1})\cdots(2\pi u_{s_p})\left(\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\lambda_{m_1}\right)\cdots\left(\frac{2\pi}{\sqrt{-1}}\lambda_{m_q}\right)\right]\\
&\quad\quad\times(E_1, \cdots, E_{2l})\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^l.
\end{aligned}
$$

于是

$$
\begin{aligned}
\mathrm{loc.ind}(D_+)&=\lim_{t\to0}\widehat{\mathrm{tr}}G(t, \xi, \xi)\\
&=\lim_{t\to0}\widehat{\mathrm{tr}}\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\sqrt{-1}x_s}{8\pi\cdot\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{-1}x_st}{2}}\right]\\
&\quad\times\exp\left(-\sum_{m=1}^{N}z_m\theta_{mm}t\right)\\
&=\sum_{m=1}^{N}\lim_{t\to0}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\sqrt{-1}\pi u_s}{4\pi\cdot\mathrm{sh}(\sqrt{-1}\pi u_st)}\right]\right.\\
&\quad\left.\times\exp(2\sqrt{-1}\pi\lambda_mt)\right\}(E_1, \cdots, E_{2l})\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{-1}}\right)^l\\
&=\sum_{m=1}^{N}\lim_{t\to0}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\sqrt{-1}\pi u_st}{\mathrm{sh}(\sqrt{-1}\,\pi u_st)}\right]\right.
\end{aligned}
$$

$$\times\exp(2\sqrt{-1}\pi\lambda_m t)\Big\}(E_1,\cdots,E_{2l})\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi t}\right)^l$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\sqrt{-1}\pi u_s}{\mathrm{sh}(\sqrt{-1}\pi u_s)}\right]\cdot\exp(2\sqrt{-1}\pi\lambda_m)\right\}$$

$$\times(E_1,\cdots,E_{2l})\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{-1}\pi}\right)^l$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\left[\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{u_s}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{u_s}{2}}\right)\cdot e^{\lambda_m}\right](E_1,\cdots,E_{2l}).$$

类似地有：

$$\mathrm{loc.ind}((d+\delta)_+^F)=\lim_{t\to0}\widehat{\mathrm{tr}}\,G(t,\xi,\xi)$$

$$=\sum_{m=1}^{N}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{\sqrt{-1}\pi u_s}{\mathrm{sh}(\sqrt{-1}\pi u_s)}\cdot\frac{e^{\sqrt{-1}\pi u_s}+e^{\sqrt{-1}\pi u_s}}{2}\right]\right.$$

$$\left.\times\exp(2\sqrt{-1}\pi\lambda_m)\right\}$$

$$\times(E_1,\cdots,E_{2l})\cdot\left(\frac{-4\sqrt{-1}}{4\pi}\right)^l$$

$$=\prod_{m=1}^{N}\left\{\left[\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tanh u_s}\right]\cdot\exp(2\lambda_m)\right\}(E_1,\cdots,E_{2l}).$$

定理 8.4.5(**扭化算子的局部指标定理**) 设

$$D_+:\Gamma(S_+\otimes F)\to\Gamma(S_-\otimes F),$$

$$(d+\delta)_+^F:\Lambda_+(M)\otimes\Gamma(F)\to\Lambda_-(M)\otimes\Gamma(F)$$

是扭化 Dirac 算子，扭化 Signature 算子，则

$$\mathrm{loc.\,ind}(D_+)=\left[\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{\frac{u_s}{2}}{\mathrm{sh}\,\frac{u_s}{2}}\right)\left(\sum_{m=1}^{N}e^{\lambda_m}\right)\right](E_1,\cdots,E_{2l}),$$

$$\mathrm{loc.\,ind}((d+\delta)_+^F)=\left[\left(\prod_{s=1}^{l}\frac{u_s}{\tanh u_s}\right)\left(\sum_{m=1}^{N}e^{2\lambda_m}\right)\right](E_1,\cdots,E_{2l}).$$

参考文献

[1] Atiyah M, Bott R, Patodi V K. On the Heat Equation and Index Theorem, Invent. Math. 1973, 19: 279～330

[2] Atiyah M, Singer I. M. The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 1963, 69: 422～433

[3] Berline N, Getzler E, Vergne M. Heat Kernels and Dirac Operatops, Springer Verlag, 1992

[4] Bott R, Tu L. Differential forms in algebraic topology, Graduate Texts in Math. 82, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New york, 1982

[5] Bismut J M. The Atiyah-Singer index theorems: A probabilistic approach I, II, J. Funct. Anal. 1984, 57: 56～99, 329～348

[6] 陈省身,陈维桓. 微分几何讲义. 北京:北京大学出版社,1983

[7] Friedman A. Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall, Inc. 1964

[8] Getzler E. A short proof of the Atiyah-Singer index theorem Topology. 1986, 25: 111～117

[9] Gilkey P B. The index theorem and heat equation, Mathematics Lecture Series No. 4, Publish or Perish Inc., Boston, 1974

[10] Goldberg S I. Curvature and homology, Academic Press, New York and London, 1962

[11] Hirzebruch F. Topological methods in algebraic geometry 3rd ed, Grundlehren der mathematische Wissenschaften 131 Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1966

[12] Mckean H. Singer I M. Curvature and the eigenvalues of the Laplacian, J. Diff. Geom. 1967, 1: 43～69

[13] Milnor J. The representation ring of some classical groups.

[14] Milgram A N, Rosenbloom P C. Harmonic forms and heat conduction, 1, 2. Proc. Nat. Acad Sci., USA. 1951, 37: 180～184, 435～438

[15] Minakshisundaram S, Pleijel A. Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds, Canad. J. Math. 1949, 1: 242～256

[16] Patodi V K. Curvature and the eigenforms of the Laplace operator, J. Diff. Geom. 1971, 5: 233～249

[17] Patodi V K. A analyt c proof of Riemann-Roch theorem for Kaehler manifolds, J. Diff. Geom. 1971, 5: 251～283

[18] Palais R S, ed. Seminar on the Atiyah-Singer index theorem, Annals of

Mathematics Study 57, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965

[19] Wu H. The Bochner technique, Proceedings of Beijing Symposium on *Differential Geometry and Differential Equations*, (S S Chern and Wu Wen-tsun eds.) New york: Science Press China and Gordon and Breach, 1982, 2: 929～1072

[20] 伍鸿熙,陈维桓. 黎曼几何选讲. 北京:北京大学出版社,1993

[21] 伍鸿熙,吕以辇,陈志华. 紧黎曼面引论. 北京:科学出版社,1981

[22] 伍鸿熙,沈纯理,虞言林. 微分几何初步. 北京:北京大学出版社,1989

[23] Yu Y L. Local index theorem for Dirac operator, Acta Math. Sinica, New Series, 1987, 3: 152～169

[24] Yu Y L. Local index theorem for Signature operators, Acta Math. Sinica, New Series, 1987, 3: 363～372

[25] Yu Y L. On indirect proof of local index theorem for Signature operator, Advances in mathematics, 1993, 22: 458～459

[26] Yu Y L. Signature 算子的局部指标定理的非直接证明. 将刊于北京大学学报,1994

[27] 虞言林,郝凤歧. 微分几何讲义. 北京:高等教育出版社,1989

[28] 张恭庆,林源渠. 泛函分析讲义(上册). 北京:北京大学出版社,1987

索　引

E

F

G

H

J